Corrigé variations de la fonction exponentielle

Exercice 1

1) $f(x)=\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$. On pose u = $\dfrac{x^2+x+1}{x^2}$ et v = $e^{-\frac{1}{x}}$.

   Alors u' = $\dfrac{(2x+1)x^2-2x(x^2+x+1)}{x^4}=\dfrac{-x-2}{x^3}$ et v' = $\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$.

   Maintenant on applique la formule uv :

   f '(x) = $\dfrac{-x-2}{x^3}\times e^{-\frac{1}{x}}+\dfrac{x^2+x+1}{x^2}\times\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}\left(-x^2-2x+x^2+x+1\right)=\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}\left(-x+1\right)}{x^4}$

2) $f(x)=e^{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$. On pose u = $\dfrac{1+x}{1-x}$, donc u' = $\dfrac{1(1-x)-(-1)(1+x)}{(1-x)^2}=\dfrac{2}{(1-x)^2}$. Puis on applique la formule e^{u} . Donc f '(x) = $\dfrac{2}{(1-x)^2}e^{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$

3) $f(x)=x^2e^x$; f '(x) = 2x e^{x} + x² e^{x} = x e^{x} (2 + x)

4) $f(x)=e^x-3x-1$; f '(x) = e^{x} – 3

5) $f(x)=(-3x^2+5)e^x$; f '(x) = (- 6 x) e^{x} + (- 3x² + 5) e^{x} = e^{x} (- 3x² - 6x + 5)

6) $f(x)=\cos x e^x$; f '(x) = - sin x e^{x} + cos x e^{x} = e^{x} (cos x – sin x)

7) $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$; f '(x) = $\dfrac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2}=\dfrac{xe^x}{(x-1)^2}$

8) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}+2x-1$; f '(x) = $\dfrac{e^x(e^x+1)-e^xe^x}{(e^x+1)^2}+2=\dfrac{e^x+2(e^x+1)^2}{(e^x+1)^2}$

9) $f(x)=(-2x+5)e^x$; f '(x) = - 2 e^{x} + (- 2x + 5) e^{x} = e^x (- 2x + 3)

10) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x+1}$; f '(x) = $\dfrac{e^x(x+1)-(e^x-1)}{(x+1)^2}=\dfrac{xe^x+1}{(x+1)^2}$

11) $f(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$; f '(x) = $\dfrac{e^x(e^x-1)-e^x(e^x+2)}{(e^x-1)^2}=\dfrac{-3e^x}{(e^x-1)^2}$

12) $f(x)=e^x-\sqrt{x}+4$; f '(x) = $e^x-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

13) $f(x)=x-\dfrac{\sin x}{e^x}$;

    f '(x) = $1-\dfrac{\cos xe^x-e^x\sin x}{e^{2x}}=\dfrac{e^x\left(e^x-\cos x+\sin x\right)}{e^{2x}}=\dfrac{e^x-\cos x+\sin x}{e^x}$

14) $f(x)=e^{3x^2-2x+1}$; f '(x) = (6x – 2) e^{3x^2-2x+1}

15) $f(x)=e^{\sin x}$; f '(x) = cos x $e^{\sin x}$

16) $f(x)=(3-x)e^{\frac{1}{x}}$; f '(x) = $-e^{\frac{1}{x}}+(3-x)\left(-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)=e^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{-x^2-3+x}{x^2}\right)$

17) $f(x)=e^{\frac{2x+1}{x+3}}$; f '(x) = $\dfrac{2(x+3)-(2x+1)}{(x+3)^2}e^{\frac{2x+1}{x+3}}=\dfrac{4}{(x+3)^2}e^{\frac{2x+1}{x+3}}$

18) $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$; f '(x) = $e^{\frac{1}{x}}+x\left(-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=e^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

19) $f(x)=xe^{x}$; f '(x) = e^{x} + x e^{x} = e^{x} (1 + x)

20) $f(x)=(3x-2)e^{x}$; f '(x) = 3 e^{x} + (3x – 2) e^{x} = e^{x} (3x + 1)

21) $f(x)=\dfrac{e^{x}}{x}$; f '(x) = $\dfrac{e^{x}x-e^{x}}{x^2}=\dfrac{e^{x}(x-1)}{x^2}$

22) $f(x)=\dfrac{2e^{x}}{x-1}$; f '(x) = $\dfrac{2e^{x}(x-1)-2e^{x}}{(x-1)^2}=\dfrac{2e^{x}(x-2)}{(x-1)^2}$

23) $f(x)=\dfrac{e^{x}+1}{e^{2x}-3}$; f '(x) = $\dfrac{e^{x}(e^{2x}-3)-2e^{2x}(e^{x}+1)}{(e^{2x}-3)^2}=-\dfrac{e^{x}\left(e^{2x}+2e^{x}+3\right)}{(e^{2x}-3)^2}$

24) $f(x)=e^{\sqrt{x}}$; f '(x) = $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$

Exercice 2

1) $e^{3x}<1$ équivaut aux lignes suivantes :
   $e^{3x}<e^{0}$
   3x < 0 car la fonction exponentielle est strictement croissante
   x < 0 S = $\left]-\infty;0\right[$

2) $e^{-x^2}-e^{2x+1}\geq 0$ équivaut aux lignes suivantes :
   $e^{-x^2}\geq e^{2x+1}$
   - x^2 ≥ 2x + 1 car la fonction exponentielle est strictement croissante
   x^2 + 2x + 1 ≤ 0
   (x + 1) ^{2} ≤ 0 S = $\{-1\}$

3) $e^{x+2}-e^{-\frac{1}{x}}\leq 0$ équivaut aux lignes suivantes :
   $e^{x+2}\leq e^{-\frac{1}{x}}$
   x + 2 ≤ $-\dfrac{1}{x}$ car la fonction exponentielle est strictement croissante
   $\dfrac{x^2+2x+1}{x}\leq 0$
   $\dfrac{(x+1)^2}{x}\leq 0$ S = $\left]-\infty;0\right[$

4) $e^{x^2}-e^{5x-4}>0$ équivaut aux lignes suivantes :
   $e^{x^2}>e^{5x-4}$
   x^2 > 5x – 4 car la fonction exponentielle est strictement croissante
   x^2 - 5 x + 4 > 0
   (x – 1) (x – 4) > 0 S = $\left]-\infty;1\right[\cup\left]4;+\infty\right[$

5) $e^{x}-e^{-x}<0$ équivaut aux lignes suivantes :
   $e^{x} < e^{-x}$
   x < - x car la fonction exponentielle est strictement croissante
   2x < 0
   x < 0 S = $\left]-\infty;0\right[$

6) $e^{5x}=-1$ pas de solution car la fonction exponentielle est strictement croissante

7) $e^{-x^2+x}\leq 1$ équivaut aux lignes suivantes :
   $e^{-x^2+x}\leq e^{0}$

- $x^2 + x \leq 0$ car la fonction exponentielle est strictement croissante

$x(1 - x) \leq 0$ S = $]-\infty;0] \cup [1;+\infty[$

8) $e^{x-3} \geq \dfrac{1}{e^x}$ équivaut aux lignes suivantes :

$e^{x-3} \geq e^{-x}$

$x - 3 \geq -x$ car la fonction exponentielle est strictement croissante

$2x - 3 \geq 0$ S = $\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right[$

Exercice 3

1) $f(x) = e^{-3x+1} > 0$ car une fonction exponentielle est strictement positive

2) $f(x) = (4x-3)e^{-x}$ est du signe de $4x - 3$ car $e^{-x} > 0$ donc $f(x) \geq 0$ sur $\left[\dfrac{3}{4};+\infty\right[$

3) $f(x) = (x^2 - 2x)(e^x - 1) = x(x-2)(e^x - 1)$. Etudions le signe de $e^x - 1$: $e^x - 1 \geq 0$ si $x \geq 0$. D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$x(x-2)$	+	0	- 0	+
$e^x - 1$	-	0	+	+
f(x)	-	0	- 0	+

4) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{e^x + 1}$ est du signe de $x^2 - 3$ car $e^x + 1 > 0$ donc $f(x) \leq 0$ sur $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$

5) $f(x) = e^x + e^{-x} - 2 = e^x + \dfrac{1}{e^x} - 2 = \dfrac{e^{2x} - 2e^x + 1}{e^x} = \dfrac{(e^x - 1)^2}{e^x} \geq 0$

6) $f(x) = e^x - x - 1$; $f'(x) = e^x - 1 \geq 0$ si $x \geq 0$. Donc f est décroissante sur $]-\infty;0[$ et croissante sur $]0;+\infty[$. Or $f(0) = 0$ donc $f(x) \geq 0$

Exercice 4

1) On a f(0) = 0 donc 2 + b = 0 et f '(0) = 3 d'où : 2 + a = 3 . On obtient : b = - 2 et a = 1 . Donc $f(x) = 2e^x + x - 2$
2) $f'(x) = 2e^x + 1 > 0$ donc la fonction f est croissante .
3) On a y = 3x .
Etudions la position : $f(x) - y = 2e^x - 2x - 2 = 2(e^x - x - 1) \geq 0$ par ex 3 question 6 .
Donc la courbe est au dessus de la tangente

Exercice 5

On a f(x) = $x + \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

1) f '(x) = $1 + \dfrac{e^x(e^x+1) - e^x e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{(e^x+1)^2 + e^x}{(e^x+1)^2} > 0$ donc la fonction f est croissante .

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{e^x+1} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{e^x}} = +\infty$.

3) Calculons f(x) – (x + 1) = $x+\frac{e^x}{e^x+1}-x-1=\frac{-1}{e^x+1}$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{e^x+1}=0$ Donc la droite d'équation y = x + 1 est asymptote oblique à la courbe

   De plus $\frac{-1}{e^x+1}<0$ donc la courbe est sous son asymptote .

4) On a f(0) = $\frac{1}{2}$. Donc I(0 ; $\frac{1}{2}$) .

   Calculons f(x) + f(- x) = $\frac{e^x}{e^x+1}+\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=\frac{e^x}{e^x+1}+\frac{1}{e^x+1}=1=2\times\frac{1}{2}$ donc I est centre de symétrie de la courbe de f .

Exercice 6

On a g(x) = $1-(x^2-2x+2)e^{-x}$

1) g(x) = $1-(x^2-2x+2)e^{-x}=1-\frac{x^2}{e^x}\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$.

   $\lim\limits_{x\to\infty}1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ par croissance comparée donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$.

   $\lim\limits_{x\to\infty}1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$

2) Calculons la dérivée :

   g'(x) = $-(2x-2)e^{-x}-(x^2-2x+2)(-e^{-x})=e^{-x}(x^2-4x+4)=e^{-x}(x-2)^2\geq 0$. Donc g est croissante .

3) La fonction g est continue car somme de 1 et d'un produit d'un polynôme par une fonction exponentielle . De plus , g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. 0 est dans l'intervalle image . Par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , il existe donc une unique solution de g(x) = 0 .On a : 0,35 < a < 0, 36

4) g(x) < 0 sur $]-\infty;a[$ et g(x) > 0 sur $]a;+\infty[$

5) f(x) = $x-1+(x^2+2)e^{-x}=x\left(1+xe^{-x}+\frac{2}{xe^x}\right)-1$

   $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$ par croissance comparée $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{xe^x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

   $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0^-$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{-x}=-\infty$ d'où

   $\lim\limits_{x\to-\infty}1+xe^{-x}+\frac{2}{xe^x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

6) f '(x) = $1+2xe^{-x}+(x^2+2)(-e^{-x})=1+e^{-x}(-x^2+2x-2)=g(x)$ donc par la question 4) : f est croissante sur $]a;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;a[$.

7) f(x) – x + 1 = $\frac{x^2}{e^x}+\frac{2}{e^x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ par croissance comparée , $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$ donc

   $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-y=0$ d'où la courbe de f admet la droite d'équation y = x – 1 pour asymptote oblique . De plus , $\frac{x^2}{e^x}+\frac{2}{e^x}$ > 0 , donc C est au dessus de son asymptote

8) y = f '(0) x + f(0) y = - x + 1

Exercice 7

Soit g(x) = $e^x + x + 1$

1) g'(x) = $e^x + 1 > 0$ donc g est croissante
2) $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$
3) La fonction g est continue car somme d'un polynôme et d'une fonction exponentielle ; g est strictement croissante et 0 est dans l'intervalle image donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , il existe une unique solution a de l'équation f(x) = 0 . - 1,28 < a < - 1, 27
4) g(x) < 0 sur $\left]-\infty; a\right[$ et g(x) > 0 sur $\left]a; +\infty\right[$