Exercice 1

1) $y' = -2y$: $y = ke^{-2x}$ avec k réel

2) $3y' - 2y = 0$ équivaut à : $y' = \frac{2}{3}y$ donc $y = ke^{\frac{2}{3}x}$ avec k réel

3) $-y' + 0{,}1y = 0$ équivaut à : $y' = 0{,}1y$ donc $y = ke^{0{,}1x}$ avec k réel

Exercice 2

1) $3y' + 5y = 0$ équivaut à : $y' = -\frac{5}{3}y$ donc $y = ke^{-\frac{5}{3}x}$ avec k réel.

On veut f (-1) = 0 donc f(x) = $ke^{-\frac{5}{3}x}$ donne $ke^{\frac{5}{3}} = 0$ donc k = 0 et f(x) = 0

2) $2y - 4y' = 0$ équivaut à : $y' = \frac{1}{2}y$ donc f(x) = $ke^{\frac{1}{2}x}$ avec k réel. On veut f '(1) = 1, or

$f'(x) = \frac{k}{2}e^{\frac{1}{2}x}$ d'où : $\frac{k}{2}e^{\frac{1}{2}} = 1$ et k = $2e^{-\frac{1}{2}}$ donc f(x) = $2e^{\frac{1}{2}(x-1)}$

3) $y' = -5y + 1$ donc f(x) = $\frac{1}{5} + ke^{-5x}$ avec k réel. On veut f(1) = 0 donc $\frac{1}{5} + ke^{-5} = 0$

d'où : $k = -\frac{1}{5}e^{5}$ et f(x) = $\frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{5(1-x)} = \frac{1}{5}\left(1 - e^{5(1-x)}\right)$

4) $2y' + y = 3$ équivaut à $y' = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$ donc $f(x) = 3 + ke^{-\frac{1}{2}x}$ avec k réel. On veut

f '(0) = 1, or f '(x) = $-\frac{1}{2}ke^{-\frac{1}{2}x}$ d'où : $-\frac{1}{2}k = 1$ donc k = - 2 et $f(x) = 3 - 2e^{-\frac{1}{2}x}$

5) $y' = -3y + 5$ donc f(x) = $\frac{5}{3} + ke^{-3x}$ avec k réel. On veut f(0) = 0 donc $k = -\frac{5}{3}$ d'où f(x) = $\frac{5}{3}\left(1 - e^{-3x}\right)$

Exercice 3

$y' = y(1-y)$ et $z = \frac{1}{y}$ donc $y = \frac{1}{z}$

On a alors : $y' = -\frac{z'}{z^2}$ d'où : $-\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{z}\right)$ qui équivaut à $-z' = z - 1$ ou z' = 1 – z

Les solutions de z' = 1 – z sont $z = 1 + ke^{-x}$ avec k réel

Et donc les solutions de (E) sont y = $\frac{1}{1 + ke^{-x}}$ avec k réel

Exercice 4

Soit g(x) = $0{,}4\cos x + 0{,}2\sin x$ alors g'(x) = $-0{,}4\sin x + 0{,}2\cos x$

On calcule g'(x) + 2g(x) = $-0{,}4\sin x + 0{,}2\cos x + 2(0{,}4\cos x + 0{,}2\sin x) = \cos x$ donc g est solution de (E).

La fonction f – g est solution de (E') équivaut à (f – g)' + 2(f – g) = 0

f ' + 2f – (g' + 2 g) = 0

f ' + 2f – cos x = 0 car g solution de (E)

C'est donc équivalent à f est solution de l'équation (E)
Les solutions de (E') sont y = ke^{-2x} avec k réel
On a donc f – g = ke^{-2x} et les solutions f de (E) sont donc de la forme
f(x) = ke^{-2x} + $0{,}4\cos x + 0{,}2\sin x$

Exercice 5

1) Calculons f '(x) = $e^{2x} + 2xe^{2x}$ d'où : f '(x) – 2f(x) = $e^{2x} + 2xe^{2x} - 2xe^{2x} = e^{2x}$ donc f est bien solution de (E1)
2) $y = ke^{2x}$ avec k réel
3) On a : g – f solution de (E2) équivaut aux lignes suivantes :
   (g – f)' – 2(g – f) = 0
   g' – 2g – (f ' – 2f) =0
   g' – 2g = e^{2x} car f solution de (E1)
   g est solution de (E1)
4) On a : $g - f = ke^{2x}$ donc g = $ke^{2x} + xe^{2x} = (k + x)e^{2x}$
5) On cherche g(x) = $(k + x)e^{2x}$ tel que g(0) = 1. Alors : k = 1 donc g(x) = $(1 + x)e^{2x}$