Méthodes de géométrie dans l'espace

Déterminer une équation cartésienne de plan

L'équation cartésienne d'un plan est du type ax + by + cz + d = 0 avec (a ;b ;c) les coordonnées d'un vecteur normal du plan .

On procède en deux étapes : D'abord déterminer un vecteur normal au plan
Ensuite déterminer d .

Première étape : Déterminer un vecteur normal au plan (ABC)

Rappels :

- Un vecteur est normal au plan s'il est orthogonal au plan
- Un vecteur est orthogonal à un plan si et seulement s'il est orthogonal à deux vecteurs sécants du plan
- Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul
- Si on a $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'$

Soit $\vec{n}$ un vecteur normal de (ABC) alors $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0$

Deux équations suffisent donc on garde par exemple $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

Ensuite , on détermine deux des coordonnées de $\vec{n}$ en fonction de la troisième . On choisit une valeur pour cette variable et on en déduit les deux autres .

Exemple

Déterminer un vecteur normal de (ABC) avec A(0 ;2 ;3) , B(1 ;0 ;5) et C(1 ;1 ;0) .

On a : $\overrightarrow{AB}(1;-2;2)$ et $\overrightarrow{AC}(1;-1;-3)$

On pose $\vec{n}$ (a ;b ;c) .

On a : $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ donc $\begin{cases}a-2b+2c=0 & L1\\ a-b-3c=0 & L2\end{cases}$

En faisant $L1-L2$: $-b+5c=0$ donc b = 5c

En faisant $L1-2L2$: $-a+8c=0$ donc a = 8c

Puisque tous les vecteurs normaux d'un même plan ont des coordonnées proportionnelles , on peut choisir la valeur qu'on veut pour c . Prenons c = 1 .

Alors $\vec{n}$ (8 ;5 ;1)

Remarque :

Si on a des fractions , on essaie de choisir c pour ne plus avoir de fraction

Par exemple , si on avait eu : $\begin{cases}a=\dfrac{2}{3}c\\ b=\dfrac{4}{5}c\end{cases}$, on pouvait choisir c = 15 . Ainsi , a = 10 et b = 12 .

Deuxième étape : déterminer d

On a les coefficients devant x , y et z . Il manque donc d . Pour cela on remplace (x ;y ;z) par les coordonnées d'un point du plan et on résout l'équation pour trouver d

Exemple

En gardant l'exemple précédent , on a comme équation cartésienne du plan (ABC) :

$8x+5y+z+d=0$

Il manque d

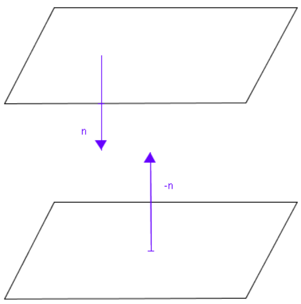
Du plan (ABC) , on connaît trois points : A , B et C

On en choisit un , prenons C (moins de risque d'erreur de calcul avec des 0 et des 1)

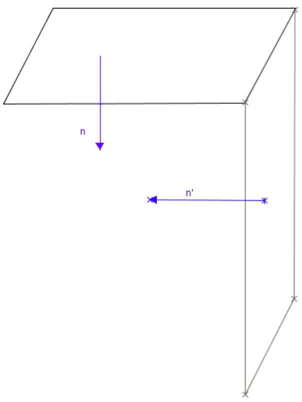
$8\times1+5\times1+0+d=0$
On résout : d = - 13
L'équation de (ABC) est donc : $8x+5y+z-13=0$
Remarque 1 : si on avait pris A ou B , on trouvait le même d
$8\times0+5\times2+3+d=0$ donne d = - 13 avec A
$8\times1+5\times0+5+d=0$ donne d = - 13 avec B
Remarque 2 : les équations cartésiennes d'un même plan sont proportionnelles . C'est-à-dire que l'équation $16x+10y+2z-26=0$ est aussi une équation de (ABC) .
En général , on essaie de les simplifier au maximum .

- *Des variantes*

On peut demander l'équation cartésienne d'un plan sans donner trois points du plan .
On en donnera un (pour pouvoir calculer d) mais on donnera des indications qui permettent de trouver le vecteur normal par d'autres raisonnements .
Pour cela , quelques règles à retenir (on peut s'aider de schémas)

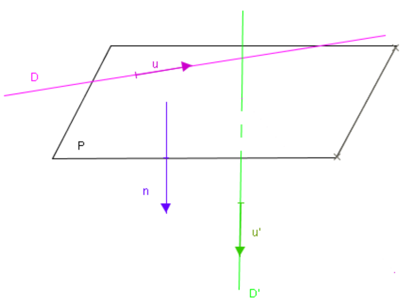


Deux plans parallèles ont le même vecteur normal (à une constante près donc on peut prendre le même)



Deux plans orthogonaux ont des vecteurs normaux orthogonaux

Des plans sécants ont des vecteurs normaux non colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles)



Si un plan contient une droite , il contient le vecteur directeur de cette droite .
Si une droite est orthogonale à un plan , son vecteur directeur est le vecteur normal du plan .
Ici , D est dans P , son vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{n}$
D' est orthogonale à P alors son vecteur $\vec{u}'$ est colinéaire (on peut même considérer égal) à $\vec{n}$

Exemple
Déterminer l'équation cartésienne du plan P parallèle au plan P' d'équation
$2x-y+3z-12=0$ sachant que P passe par A(0 ;8 ;5)
Puisque P et P' sont parallèles , ils ont même vecteur normal .
Le vecteur normal de P' est $\vec{n}(2;-1;3)$: celui de P aussi
Donc une équation cartésienne de P est : $2x-y+3z+d=0$
Puisque A appartient à P , on a : $2\times 0-8+3\times 5+d=0$ donc d = - 7
Et donc P : $2x-y+3z-7=0$

Représentation paramétrique de droites

On a besoin du vecteur directeur de la droite et d'un point de la droite
On a alors :

Un point M(x ;y ;z) appartient à la droite D de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$ et qui passe par le point A$\left(x_A;y_A;z_A\right)$ si et seulement si : $\begin{cases} x=x_A+ka \\ y=y_A+kb \\ z=z_A+kc \end{cases}$ avec k réel .

Cas classique

On détermine le vecteur directeur de la droite et on applique simplement la formule ci-dessus
Exemple
Déterminer une représentation paramétrique de (AB) avec A(1 ;2 ;3) et B(0 ;8,4)
Commençons par déterminer un vecteur directeur de (AB) ; soyons simples !
$\overrightarrow{AB}(-1;6;1)$
La droite (AB) passe par A et B (ce qu'on peut être simplistes quand même !)
On choisit un point : A par exemple
On applique la formule :
$\begin{cases} x=x_A+ka=1-k \\ y=y_A+kb=2+6k \\ z=z_A+kc=3+k \end{cases}$ avec k réel .

Remarque :
Si on choisit B , on a une autre représentation paramétrique de la même droite .
$\begin{cases} x=-k' \\ y=8+6k' \\ z=4+k' \end{cases}$ avec k' réel
En fait , ce qui change pour les points , c'est le « k » .
Avec la première qu'on a trouvé , le point A correspond à k = 0
Avec la deuxième : le point A correspond à k' = -1

Des variantes

Comme précédemment , on peut donner des indications autres que deux points pour trouver le vecteur directeur de la droite .
Deux droites orthogonales ont des vecteurs directeurs orthogonaux ; leurs vecteurs normaux sont orthogonaux ; on peut aussi dire que le vecteur directeur de l'une est le vecteur normal de l'autre .
Deux droites parallèles ont le même vecteur directeur et le même vecteur normal .

Retrouver la représentation paramétrique à partir de deux équations de plans

Rappels :

- L'intersection de deux plans est soit vide , soit un plan , soit une droite
- Deux plans sont sécants si leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires

Autrement dit , quand on a les équations cartésiennes de deux plans , on peut chercher leur intersection .
Si c'est une droite , alors on doit pouvoir retrouver la représentation paramétrique de cette droite à partir des deux équations de plans .
Pour cela , on utilise les combinaisons linéaires pour exprimer deux variables en fonction de la troisième .

Exemple

Soient P : $3x+7y-5z+2=0$ et P' : $2x-3y+z-4=0$

On veut déterminer la représentation paramétrique de la droite intersection de ces deux plans

Commençons par vérifier que ces deux plans sont bien sécants :

On a $\vec{n}(3;7;-5)$ vecteur normal de P et $\vec{n}'(2;-3;1)$ vecteur normal de P' .

Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles (en effet :

3	7	- 5
2	- 3	1

n'est pas un tableau de proportionnalité)

Les deux vecteurs normaux ne sont pas colinéaires et donc les plans sont sécants

Déterminons maintenant la représentation paramétrique de la droite d'intersection

On considère le système :

$$\begin{cases} 3x+7y-5z+2=0 & L1 \\ 2x-3y+z-4=0 & L2 \end{cases}$$

On utilise les combinaisons linéaires , comme si on cherchait à résoudre les système par Gauss , par exemple :

$$2L1-3L2 \text{ et } 3L1+7L2 : \begin{cases} 23x-8z-22=0 \\ 23y-8z+16=0 \end{cases} \text{ ce qui donne } \begin{cases} x=\dfrac{22}{23}+\dfrac{8}{23}z \\ y=-\dfrac{16}{23}+\dfrac{8}{23}z \end{cases}$$

On pose alors z = k et on a la représentation paramétrique de la droite intersection de P et P' :

$$\begin{cases} x=\dfrac{22}{23}+\dfrac{8}{23}k \\ y=-\dfrac{16}{23}+\dfrac{8}{23}k \quad \text{avec k réel} \\ z=k \end{cases}$$

Vecteur et point de cette droite

On peut ainsi en déduire un vecteur directeur de cette droite : $\vec{u}\left(\dfrac{8}{23};\dfrac{8}{23};1\right)$ ou puisque les vecteurs directeurs sont tous colinéaires : $\vec{u}(8;8;23)$; et un point de cette droite : $\left(\dfrac{22}{23};-\dfrac{16}{23};0\right)$ et pas de simplification car les points ne sont pas « proportionnels » , eux !

Méthodes de géométrie dans l'espace

Equation cartésienne d'une sphère

L'équation cartésienne d'une sphère de centre A er de rayon R est :
$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2$

On donne le rayon et le centre

Dans ce cas , on applique simplement la formule ci-dessus
Exemple
Déterminer une équation cartésienne d'une sphère de centre A(5 ;3 ;0) et de rayon 6
$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2$ donne $(x-5)^2+(y-3)^2+(z-0)^2=6^2$ c'est-à-dire :
$(x-5)^2+(y-3)^2+z^2=36$

On donne une équation et on veut retrouver centre et rayon

Pour cela on utilise la forme canonique pour faire réapparaitre la formule de la définition
Exemple
Déterminer l'ensemble des points M(x ;y ;z) de l'espace qui vérifient :
$x^2+y^2+z^2-3x+4y-2z+10=0$
On regroupe les termes « en famille » : $x^2-3x+y^2+4y+z^2-2z+10=0$

On sait que x^2-3x est le début de $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2$ mais $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2=x^2-3x+\dfrac{9}{4}$

Donc $x^2-3x=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$.

On procède de même avec les y et avec les z , on obtient :

$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+(y+2)^2-4+(z-1)^2-1+10=0$

Soit $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2+(z-1)^2-\dfrac{19}{4}=0$ et donc $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=\dfrac{19}{4}$

On a donc l'équation cartésienne d'une sphère de centre $A\left(\dfrac{3}{2};-2;1\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{19}}{2}$

Intersection d'une droite et d'un plan

On a besoin d'une équation cartésienne du plan et de la représentation paramétrique d'une droite
On remplace dans l'équation du plan les x , y et z par ceux de la représentation paramétrique de la droite , on détermine k .
Exemple
Déterminer le point d'intersection du plan P : $2x+3y+4z-8=0$ et de la droite D dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=2-3k \\ y=-1+k \\ z=3+k \end{cases}$ avec k réel

On remplace dans l'équation de P : $2(2-3k)+3(-1+k)+4(3+k)-8=0$. On résout :

$5+k=0$ donc k = - 5 . On a donc : $\begin{cases} x=2-3(-5)=17 \\ y=-1-5=-6 \\ z=3-5=-2 \end{cases}$ et le point d'intersection est

B(17 ;-6 ;-2) .

Distance d'un point à une droite dans l'espace

Rappels :

- Dans le plan : Soit d une droite d'équation ax + b + c = 0 et soit M(u,v) un point du plan : Alors la distance de M à d est donnée par $\frac{|au+bv+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
- Dans l'espace : Soit P un plan de l'espace d'équation ax + by + cz + d = 0 et soit M(u,v,w) un point de l'espace . Alors la distance de M à P est donnée par $\frac{|au+bv+cw+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

On a ces deux formules à notre disposition qui permettent de calculer des distances ; hélas aucune ne s'applique à cette situation !
On doit donc utiliser le projeté orthogonal .
Méthode : on cherche à déterminer la distance d'un point A à la droite D .

1) On détermine la représentation paramétrique de D .
2) On appelle H le projeté orthogonal de A sur D
3) Par définition , H est sur D donc les coordonnées de H vérifient la représentation paramétrique de D .
4) Par définition , (AH) et D sont orthogonales donc on utilise le produit scalaire : $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$ et on détermine k .
5) On calcule la longueur AH

Exemple
Déterminer la distance de A(2 ;3 ;1) à la droite D de représentation paramétrique :
$\begin{cases} x=1-k \\ y=-2+3k \\ z=3-2k \end{cases}$ avec k réel .

Soit H(x ;y ;z) le projeté orthogonal de A sur D alors H est sur D et donc $\begin{cases} x=1-k \\ y=-2+3k \\ z=3-2k \end{cases}$

A partir de la représentation paramétrique de D , on peut déterminer un vecteur directeur de D : $\vec{u}(-1;3;-2)$; de plus $\overrightarrow{AH}(x-2;y-3;z-1)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AH}(1-k-2;-2+3k-3;3-2k-1)$ et donc $\overrightarrow{AH}(-1-k;-5+3k;2-2k)$

(AH) et D sont orthogonales donc $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$ donc : $-1(-1-k)+3(-5+3k)-2(2-2k)=0$

Ce qui donne : $-18+14k=0$ donc $k=\frac{18}{14}=\frac{9}{7}$

On a donc $\overrightarrow{AH}(-1-\frac{9}{7};-5+3\times\frac{9}{7};2-2\times\frac{9}{7})$ donc $\overrightarrow{AH}\left(-\frac{16}{7};-\frac{8}{7};-\frac{4}{7}\right)$

Calculons maintenant AH = $\sqrt{\left(\frac{16}{7}\right)^2+\left(\frac{8}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{336}}{7}=\frac{2\sqrt{84}}{7}$

La distance de A à D est donc $\frac{2\sqrt{84}}{7}$.