Démonstration du théorème de comparaison

Théorème de comparaison

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$$

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

Le principe

On ne démontre que la première propriété

On utilise la démonstration de la limite infinie d'une suite

On applique la majoration

La démonstration

Définition d'une limite infinie

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ donc il existe m tel que pour tout n > m , $u_n \in]A; +\infty[$ pour tout réel A

Utilisation de la majoration

$$u_n \leq v_n$$

Donc à partir d'un certain rang , tous les termes de la suite (v_n) sont plus grands que ceux de la suite (u_n) autrement dit :
Il existe p tel que pour tout n > p , $u_n \leq v_n$

Revenir à la limite de (u_n)

Dans les deux points précédents , on a du tenir compte du fait que la propriété est valable à partir d'un certain rang mais rien ne dit que pour ces deux propriétés , ce sera le même rang .
On va donc prendre le plus grand rang à partir duquel les deux propriétés s'appliquent .
On cherche donc un entier qui est à la fois plus grand que m et que p :

Soit N = max (m , p) alors , pour tout n > N
$u_n \leq v_n$ *puisque* $n > N > p$
$u_n \in]A; +\infty[$ *puisque* $n > N > m$ pour tout réel A

Donc pour n > N , on a : A < $u_n \leq v_n$

Donc $v_n \in]A; +\infty[$ pour tout réel A et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$