

Propriété (hors programme mais intéressant pour ceux qui poursuivent en scientifique)

Soient u et v deux fonctions dérivables

$$\text{Alors } \int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx \quad (\text{intégration par parties})$$

Démonstration

Le principe

On applique la formule de la dérivée d'un produit

Pour retenir cette démonstration

Bien connaître la dérivée d'un produit

Les pré requis

Si f est une fonction de primitive F : $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

La linéarité de l'intégrale

La démonstration

Soient u et v deux fonctions dérivables

$$\text{Alors } (u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Si deux fonctions sont égales , leurs intégrales aussi

$$\text{Donc } \int_a^b (u(x)v(x))' dx = \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = \int_a^b (u'(x)v(x))dx + \int_a^b (u(x)v'(x))dx$$

Or par définition , une primitive de f ' est f donc une primitive de (uv)' est uv .

On a donc :

$$\int_a^b (u(x)v(x))' dx = [u(x)v(x)]_a^b$$

$$\text{D'où : } [u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b (u'(x)v(x))dx + \int_a^b (u(x)v'(x))dx$$

$$\text{Et aussi : } [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b (u'(x)v(x))dx = \int_a^b (u(x)v'(x))dx$$

On va maintenant regarder des propriétés dont les démonstrations ne sont pas exigibles mais qui ont déjà été posées au bac en s'utilisant les unes les autres comme pré requis !

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a ; b]$. Si on a pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) < g(x)$

alors $\int_a^b f(t)dt < \int_a^b g(t)dt$ (conservation de l'ordre)

Démonstration

Le principe

On utilise la conservation du signe

Pour retenir cette démonstration

Ecrire la conservation du signe et faire apparaître celle-ci

Les pré requis

La linéarité de l'intégrale

La conservation du signe par passage à l'intégrale .

La démonstration

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I .

Supposons que pour tout x de I , $f(x) < g(x)$.

Alors $f(x) - g(x) < 0$

On a donc par conservation du signe par l'intégration : $\int_a^b (f(x) - g(x))dx < 0$

Par linéarité de l'intégrale : $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx < 0$

Et donc $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$

Propriété

Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$. On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que

$$m \leq f(x) \leq M \text{ pour tout } x \text{ de } [a ; b] . \text{ Alors : } m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$$

Démonstration

Le principe

On applique la conservation de l'ordre

Pour retenir cette démonstration

La traiter comme un exercice

Les pré requis

La conservation de l'ordre par intégration

La linéarité de l'intégrale

La démonstration

Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$. On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que

$$m \leq f(x) \leq M \text{ pour tout } x \text{ de } [a ; b]$$

Par conservation de l'ordre , en intégrant , on obtient :

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

Comme m et M sont des constantes , on peut appliquer la linéarité de l'intégrale et on obtient :

$$m \int_a^b 1 dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b 1 dx$$

Or une primitive de 1 est x donc $\int_a^b 1 dx = [x]_a^b = b - a$

$$\text{D'où : } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$