# Démonstrations des formules avec les coefficients binomiaux

## Propriété

$$\binom{n}{n}=1$$

$$\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$$

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

## Démonstration

*Le principe*

On utilise la définition et uniquement elle .

*Pour retenir cette démonstration*

La refaire , elle n'est pas difficile

*Les pré requis*

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

0 ! = 1

n ! = $1\times 2\times 3\times \ldots \times n$

*La démonstration*

*Montrons la première*

$$\binom{n}{n}=\frac{n!}{n!0!}=\frac{1}{0!}=1$$

*Montrons la deuxième*

$$\binom{n}{1}=\frac{n!}{1!(n-1)!}=n$$

$$\binom{n}{n-1}=\frac{n!}{(n-1)!(n-n+1)!}=\frac{n!}{(n-1)!1!}=n$$

*Montrons la troisième*

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(n-n+k)!(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}=\binom{n}{n-k}$$

# *Démonstrations des formules avec les coefficients binomiaux*

## Propriété

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

## Démonstration

*Le principe*

On part du deuxième membre , on applique la définition et on travaille avec des fractions .

*Pour retenir cette démonstration*

Apprendre la définition , bien connaître les propriétés ( en particulier n ! = (n – 1 ) ! x n ) et penser à mettre les fractions au même dénominateur

*Les pré requis*

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

0 ! = 1

n ! = $1\times2\times3\times...\times n$

*La démonstration*

- *On utilise la définition pour le deuxième membre*

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$ par la définition des coefficients binomiaux .

- *On additionne les fractions*

Pour additionner les fractions , on les met au même dénominateur .
Puisque $k!=(k-1)!\times k$ et $(n-k)!=((n-k)-1)!\times(n-k)$ , le dénominateur commun est donc k !(n – k ) ! et on multiplie donc la première fraction par (n – k ) et la deuxième par k . On obtient :

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{(n-1)!(n-k)+(n-1)!(k)}{k!(n-k)!}$$

- *On fait apparaître la définition du coefficient cherché*

On factorise par ( n – 1 ) ! le numérateur et on a :

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!(n-k)+(n-1)!(k)}{k!(n-k)!}=\frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!}=\frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

D’où la conclusion .