

## Démonstration du théorème du point fixe

### Théorème

Soit une suite  $(u_n)$  définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f$  une fonction continue. Si la suite  $(u_n)$  converge vers un réel  $m$  alors  $m = f(m)$ .

### Démonstration

#### Le principe

On montre que  $f(u_n)$  et  $u_n$  ont la même limite en utilisant la limite de fonctions composées et la définition de la continuité d'une fonction en un point.

#### Pour la retenir

L'écrire « en cascade »

#### Les pré requis utilisés dans cette démonstration

La définition de la continuité d'une fonction en un point

La limite de fonctions composées

L'unicité de la limite

### La démonstration

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f$  une fonction continue.

On suppose que la suite  $(u_n)$  converge vers un réel  $m$ .

$$\text{●} \quad \lim_{x \rightarrow m} f(x) = f(m) \text{ car } f \text{ est continue}$$

$$\text{Et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = m$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(m)$  par la limite de fonctions composées

$$\text{●} \quad \text{De plus, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = m \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n + 1 = +\infty$$

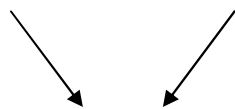
Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = m$

Et donc par unicité de la limite :  $f(m) = m$ .

### Ecriture en cascade :

$$\lim_{x \rightarrow m} f(x) = f(m) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = m$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = m$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(m)$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = m$$



$$f(m) = m$$