Second degré

- Soit l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec a réel non nul . $\Delta = b^2 - 4ac$
  - Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution
  - Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$
  - Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$
  - Si $\Delta < 0$, f n'a pas de forme factorisée .
  - Si $\Delta = 0$, $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$
  - Si $\Delta > 0$,$f(x) = a\left(x + \dfrac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$
-
  - Si $\Delta < 0$, f est du signe de a pour tout x .
  - Si $\Delta = 0$,f est du signe de a pour tout x non égal à la racine de f .
  - Si $\Delta > 0$, f est du signe de a à l'extérieur des racines .

Suites

Suites arithmétiques et géométriques

- Une suite est arithmétique si et seulement si $u_{n+1} - u_n = r$ avec r réel . Dans ce cas :
  - $u_n = u_0 + nr$
  - $u_0 + ... + u_n = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$
- Une suite est géométrique si et seulement si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$ avec q réel . Dans ce cas :
  - $u_n = u_0 \times q^n$
  - $u_0 + ... + u_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

★★ *Essentiels* ★★

Variations et minoration , majoration

- Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite est croissante .
- Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite est décroissante
- Si la suite est **positive** et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors la suite est croissante .
- Si la suite est **positive** et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors la suite est décroissante .
- Si $u_n - A \leq 0$ alors la suite est majorée par A
- Si $u_n - A \geq 0$ alors la suite est minorée par A

Convergence

- Une suite qui admet une limite finie converge
- Une suite qui n'a pas de limite diverge
- Une suite qui tend vers l'infini diverge
- Une suite géométrique de raison comprise strictement entre -1 et 1 tend vers 0 .
- Théorème des gendarmes : si $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite a , alors (v_n) converge et tend vers a .
- Théorème de comparaison : si $u_n \leq v_n$ et si u_n tend vers $+\infty$ alors v_n tend vers $+\infty$

Limites

Formes indéterminées

Il y a quatre formes indéterminées : $+\infty - \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$ et $0 \times \infty$

Formules à connaitre

- L'addition , la multiplication , la soustraction et la division s'appliquent aux limites .

- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ si n impair
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ si n pair
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Fonction exponentielle

Limites

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Propriétés

- $e^0 = 1$
- $e = e^1 \approx 2,71$
- $e^x > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$
- $e^{x+y} = e^x e^y$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $e^{nx} = (e^x)^n$
- $e^x = e^y \iff x = y$

Equations différentielles

- L'équation $y' = ay$ a pour solution $y = kea^x$ avec k réel
- L'équation $y' = ay + b$ a pour solution $y = -\dfrac{b}{a} + kea^x$ avec k réel

Dérivées

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
x	1	u	u'
x^n	nx^{n-1}	u^n	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{u^n}$	$-\frac{nu'}{u^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u+v$	$u'+v'$		
uv	$u'v+uv'$		
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$		
sinx	cosx	sinu	u'cosu
cosx	-sinx	cosu	-u'sinu
tanx	$1+tan^2x=\frac{1}{cos^2x}$	tanu	$u'(1+tan^2u)=\frac{u'}{cos^2u}$
e^x	e^x	e^u	$u'e^u$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$ln(u)$	$\frac{u'}{u}$

Logarithmes

Limites

- $\lim\limits_{x \to +\infty} lnx = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} lnx = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{lnx}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} x^n lnx = 0$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{lnx}{x-1} = 1$

Propriétés

- lnx est défini si $x > 0$
- $ln(e^x) = x$
- $e^{lnx} = x \, \forall x > 0$
- $ln1 = 0$
- $ln(e) = 1$
- $lnx > 0 \iff x > 1$
- $ln(xy) = lnx + lny$
- $ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -lnx$
- $ln(x^n) = nlnx$
- $lnx = lny \iff x = y$
- $log_a(x) = \dfrac{lnx}{lna}$
- $a^x = e^{xlna}$

Intégration

- F est une primitive de f si et seulement si $F'(x) = f(x)$
- Si F et G sont deux primitives d'une même fonction , alors il existe une constante k telle que $F = G + k$
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{dt} = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ avec F primitive de f.
- $\displaystyle\int_a^a f(t)\ \mathrm{dt} = 0$
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{dt} = -\int_b^a f(t)\ \mathrm{dt}$
- $\displaystyle\int_a^b f(t) + g(t)\ \mathrm{dt} = \int_a^b f(t)\ \mathrm{dt} + \int_a^b g(t)\ \mathrm{dt}$ (Linéarité)

- $\int_a^b kf(t)\ \mathrm{d}t = k\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ avec k réel (Linéarité)
- $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t$ (Chasles)
- Si $f(x) < g(x)\, \forall x \in [a;b]$ alors $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t < \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ (conservation de l'ordre)
- Si $m < f(x) < M\, \forall x \in [a;b]$ alors $m(b-a) < \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t < M(b-a)$ (inégalité de la moyenne)
- La valeur moyenne de f(x) sur [a ;b] est égale à : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$
- $\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .
- Si $f(x) < g(x)\, \forall x \in [a;b]$, l'aire du domaine compris entre les courbes de f et g , les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est $\int_a^b (g(t) - f(t))\ \mathrm{d}t$

Probabilités

les formules de base

- $p(A) = \frac{nombre\,elements\,de\,A}{nombre\,total\,d'elements}$
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
- $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(a) + p(B)$
- A et B sont incompatibles si et seulement si $A \cap B = \emptyset$

probabilités conditionnelles

- $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$
- A et B sont indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A)p(B)$
- A et B sont indépendants si et seulement si $p_A(B) = p(B)$

★★ *Essentiels* ★★

loi binomiale

- Un schéma de Bernoulli est la répétition de n expériences identiques et indépendantes à deux issues nommées succès et échec .
- La variable aléatoire X associée au nombre de succès dans un schéma de Bernoulli suit une loi binomiale de paramètres n (nombre d'expériences) et p (probabilité du succès)
- $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$

loi à densité

- Une fonction f est une densité de probabilité sur [a ;b] si f est continue , positive et $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = 1$
- $p(\alpha < X < \beta) = \displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t$ si f est la densité de probabilité de la variable aléatoire X .
- $p(X = a) = 0$
- $p(X \leq a) = p(X < a)$
- $E(X) = \displaystyle\int_a^b t f(t)\ \mathrm{d}t$

loi uniforme

- La densité de probabilité associée à la variable aléatoire suivant une loi uniforme sur [a ;b] est $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$
- $p(\alpha < X < \beta) = \dfrac{\beta - \alpha}{b - a}$
- $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

loi exponentielle

- La variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $k > 0$ si la densité de probabilité qui lui est associée est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = ke^{-kx}$
- $p(X > a) = e^{-ka}$
- $p(a < X < b) = e^{-ka} - e^{-kb}$
- $E(X) = \dfrac{1}{k}$
- $p_{X>h}(X > t + h) = p(X > t)$ (durée de vie sans vieillissement)