

1 Théorème fondamental



A retenir

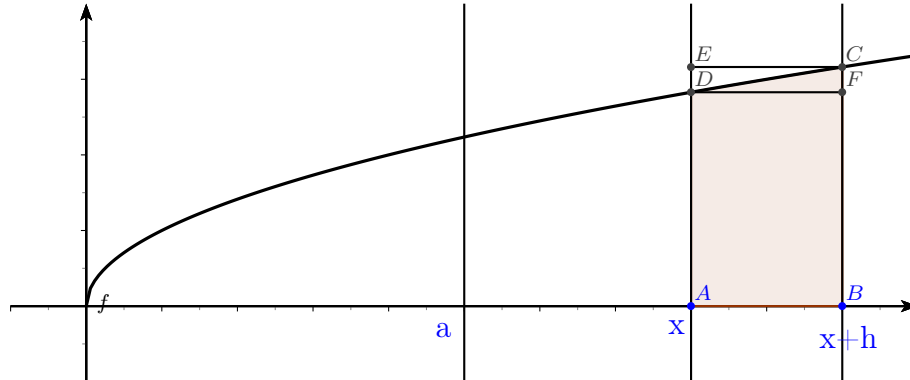
Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ alors $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Le principe

On se place dans le cas où f est croissante. On va d'abord démontrer que F est dérivable en un point. Pour cela, on travaille avec l'aire sous la courbe qu'on va encadrer par des rectangles. Puis, on généralise et on calcule $F(a)$

La démonstration

- La situation : f est une fonction croissante positive sur $[a; b]$. on choisit x réel tel que $x > a$ et h réel strictement positif. On fait un schéma suffisamment clair et précis. On hachure l'aire sous la courbe comprise entre x et $x + h$. On trace les rectangles en dessous et au dessus. On pose des notations pour que ce soit clair. On obtient ceci :



- Montrons que F est dérivable en x quelconque :

F est dérivable en x si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ est un nombre fini.

$F(x+h) - F(x) = \text{Aire(rose)}$.

Or l'aire rose est encadrée par l'aire de deux rectangles : **ABFD** et **ABCE**.

$(x+h-x)f(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq (x+h-x)f(x+h)$

$\iff hf(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq hf(x+h)$

Or $h > 0$ donc $f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$

$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$

Donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) \forall x$. Donc pour tout x , F est dérivable en x et $F'(x) = f(x) \forall x$.

F est donc bien une primitive de f .

- Calculons $F(a)$

$$F(a) = \int_a^a f(t) \, dt = 0$$

- Montrons l'unicité :

Soit G une autre primitive de f qui s'annule en a .

Alors : $(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = 0 \, \forall x$.

Donc $F(x) - G(x)$ est une constante . Or $F(a) - G(a) = 0$ donc $F(x) - G(x) = 0 \, \forall x$

et $F(x) = G(x) \, \forall x$

2 Calcul de $\int_a^b f(t) \, dt$ en utilisant les primitives



A retenir

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et soit F une de ses primitives . Alors

$$\int_a^b f(t) \, dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Le principe

On va utiliser $G(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ primitive de f et une autre primitive F .

La démonstration

Soit F une primitive de f .

On sait que $G(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ est également une primitive de f et qu'elle s'annule en a .

Par les propriétés des primitives , $F(x) = G(x) + k$ avec k réel .

Or G s'annule en a donc $F(a) = G(a) + k = k$

On a donc : $\int_a^b f(t) \, dt = G(b) = F(b) - k = F(b) - F(a)$

3 Intégration par parties



A retenir

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur $[a;b]$. Alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t) \, dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) \, dt$$

Le principe

On applique les formules de dérivées

La démonstration

Soient u et v deux fonctions dérivables : $(u(t)v(t))' = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$ donc

$$\int_a^b (u(t)v(t))' \, dt = \int_a^b u'(t)v(t) \, dt + \int_a^b (u(t)v'(t)) \, dt$$

uv est une primitive de $(uv)'$ donc $\int_a^b (u(t)v(t))' \, dt = [u(t)v(t)]_a^b$ et on a donc :

$$[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t) \, dt + \int_a^b (u(t)v'(t)) \, dt$$

$$\text{D'où: } \int_a^b u'(t)v(t) \, dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) \, dt$$