# 1 Indépendance

## 1.1 Rappel sur les probabilités conditionnelles

**Propriété.**

- On appelle probabilité de B sachant A et on note $p_A(B)$ la probabilité conditionnelle entre A et B
- $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$
- $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$

*Exemple.*
Une usine fabrique un composant électronique. Deux chaînes de fabrication sont utilisées. La chaîne A produit 40 % des composants et la chaîne B produit le reste. Une partie des composants fabriqués présentent un défaut qui les empêche de fonctionner à la vitesse prévue par le constructeur. En sortie de chaîne A, 20 % des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaîne B, ils ne sont que 5 %. On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine. On note : $A$ l'évènement "le composant provient de la chaîne A " ; $B$ l'évènement " le composant provient de la chaîne B " ; $S$ l'évènement " le composant est sans défaut" ;

1. Faire un arbre de probabilités
2. Donner $p(A)$
3. Donner $p_A(S)$
4. Calculer $p(A \cap S)$
5. Calculer $p(S)$

### 1.2 Evénements indépendants

**Définition.**
Soient deux événements A et B alors , A et B sont indépendants si et seulement si $p_B(A) = p(A)$

**Propriété.**
A et B sont indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

*Exemple.*
Le plateau de roulette est composée de 18 secteurs rouges , 18 secteurs noirs et un secteur vert , tous de la même taille . On lance quatre fois successivement la bille et on note la couleur obtenue .

1. Déterminer la probabilité d'obtenir l'issue , dans cet ordre , R-V-R-N
2. Déterminer la probabilité d'obtenir exactement deux fois la face rouge .

## 2 Schéma de Bernoulli

### 2.1 Loi de Bernoulli

**Définition.**
On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire à deux issues (succès ou échec)

*Exemple.*
On lance un dé à six faces et on note A l'événement "obtenir le six " . On est bien dans une épreuve de Bernoulli , le succès étant obtenir le six et l'échec ne pas obtenir six .

**Propriété.**
Soit une épreuve de Bernoulli telle que la probabilité du succès est p . Soit X la variable aléatoire égale à 1 en cas de succès et égale à 0 en cas d'échec . La loi de probabilité de X , appelée loi de Bernoulli de paramètre p et notée par $\mathfrak{B}(p)$ est donnée par

| $x_i$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | 1-p | p |

*Exemple.*
On lance un dé à six faces et on note A l'événement "obtenir le six " . Donner la loi de Bernoulli correspondante .

### 2.2 Schéma de Bernoulli

**Définition.**
On appelle schéma de Bernoulli la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques .

*Exemple.*
On lance un dé à six faces et on note A l'événement "obtenir le six " . On répète trois fois cette expérience . Réaliser l'arbre pondéré de ce schéma .

## 3 Coefficients binomiaux

**Définition.**
On appelle factorielle de n , et on note $n!$ l'expression $1 \times 2 \times 3... \times n$

*Remarque.*

- Par convention , $0! = 1$
- $(n+1)! = n! \times (n+1)$

**Définition.**
On appelle combinaison de p éléments parmi n et on note $\binom{n}{p}$ le nombre de parties de p éléments choisies dans un ensemble de n éléments . On peut aussi considérer ce nombre comme celui de k succès dans un schéma de Bernoulli à n épreuves .

**Propriété.**
$\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

**Propriété.**

- $\binom{n}{0} = n$
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- Relation de Pascal $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

**Propriété.**
Triangle de Pascal

| E/P | 0 | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | |
| 4 | 1 | 4 | $\boxed{6}$ | 4 | 1 |

*Remarque.*
$\binom{4}{2} = 6$

## 4 Loi binomiale

**Définition.**
Soit un schéma de Bernoulli de n expériences de paramètre p . Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès . La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres n et p et notée $\mathcal{B}(n;p)$

**Propriété.**
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p . Alors : $p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

*Exemple.*
On lance 5 fois un dé . On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où on obtient le 6 . Déterminer $p(X = 2)$

**Propriété.**
Soit X la variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ . Alors :

- Espérance de X : $E(X) = np$
- Variance de X : $V(X) = np(1-p)$

# 5 Deux autres lois

## 5.1 Loi uniforme discrète

**Définition.**
Une variable aléatoire X suit la loi uniforme discrète sur $\{1; 2; ...; n\}$ si elle prend pour valeur tous les entiers compris entre 1 et n de façon équiprobable.

Dans ce cas , $p(X = k) = \dfrac{1}{n}, \forall k \in [\![1; n]\!]$

**Propriété.**
Soit U=une variable aléatoire X suivant la loi uniforme discrète sur $\{1; 2; ...; n\}$ . Alors :

- $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$
- $V(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$

## 5.2 Loi géométrique

**Définition.**
Soit une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est p . On répète cette épreuve de façon indépendante jusqu'à obtenir un succès . Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'essais nécessaires pour obtenir le premier succès . Alors on dit que X suit la loi géométrique de paramètre p notée $\mathcal{G}(p)$

**Propriété.**
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ .

- $p(X = k) = p(1-p)^{k-1}$
- $p(X \leq k) = 1 - (1-p)^k$
- $p(X \geq k) = (1-p)^k$
- $E(X) = \dfrac{1}{p}$

**Propriété.** ( non vieillissement de la loi géométrique )
X suit une loi géométrique si et seulement si pour tous t et s entiers non nuls , on a : $p_{X_geqs}(X \geq t+s) = p(X \geq t)$