

Corrigé fiche 3

Exercice 1

- 1) $f'(x) = 15(3x - 1)^4 > 0$
- 2) $f'(x) = -\frac{1}{(x + 1)^2} < 0$; 3) $f'(x) = \frac{3}{(5 - 3x)^2} > 0$;
- 4) $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} > 0$ si $x < 0$ et $f'(x) < 0$ si $x > 0$
- 5) $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2} < 0$;
- 6) $f'(x) = \frac{10x}{(3 - 5x^2)^2} < 0$ si $x < 0$ et $f'(x) > 0$ si $x > 0$
- 7) $f'(x) = -\frac{3}{x^4} < 0$; 8) $f'(x) = \frac{1}{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{(x + 1)^2} > 0$;
- 9) $f'(x) = -\frac{2x}{(4 + x^2)^2} > 0$ si $x < 0$ et $f'(x) < 0$ si $x > 0$
- 10) $f'(x) = \frac{2(4x + 1) - 4(2x + 1)}{(4x + 1)^2} = \frac{-2}{(4x + 1)^2} < 0$; 11) $f'(x) = \frac{1}{(1 + 2x)^2} > 0$;
- 12) $f'(x) = \frac{5(x + 3) - 5x + 1}{(x + 3)^2} = \frac{16}{(x + 3)^2} > 0$;

Exercice 2

- 1) $f'(x) = \frac{3(2 - 5x) + 5(3x - 7)}{(2 - 5x)^2} = \frac{-29}{(2 - 5x)^2} < 0$
- 2) $f'(x) = \frac{2x^2 - 8 - 4x^2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-2x^2 - 8}{(x^2 - 4)^2} = -\frac{(2x^2 + 8)}{(x^2 - 4)^2} < 0$;
- 3) $f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} > 0$ si $x > 0$ et $f'(x) < 0$ si $x < 0$;
- 4) $f'(x) = \frac{(4x - 5)(x - 3) - 2x^2 + 5x - 3}{(x - 3)^2} = \frac{2x^2 - 12x + 12}{(x - 3)^2}$

Le dénominateur est positif donc $f'(x)$ est du signe de $2x^2 - 12x + 12 = 2(x^2 - 6x + 6)$

$$\Delta = 36 - 24 = 12$$

$$x' = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{2} = 3 - \sqrt{3} \text{ et } x'' = 3 + \sqrt{3}$$

x		$3 - \sqrt{3}$		$3 + \sqrt{3}$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

- 5) $f'(x) = \frac{1 + \sqrt{x} - \frac{x}{2\sqrt{x}}}{(1 + \sqrt{x})^2} = \frac{2 + \sqrt{x}}{2(1 + \sqrt{x})^2} > 0$;
- 6) $f'(x) = \frac{x + \sqrt{x} - x - \frac{x}{2\sqrt{x}}}{(x + \sqrt{x})^2} = \frac{\sqrt{x}}{2(x + \sqrt{x})^2} > 0$
- 7) $f'(x) = 2\left(\frac{x - 3}{x + 1}\right)\left(\frac{x + 1 - x + 3}{(x + 1)^2}\right) = \frac{8(x - 3)}{(x + 1)^3} = \frac{8(x - 3)}{(x + 1)(x + 1)^2}$;

$(x + 1)^2$ est positif donc $f'(x)$ est du signe de $(x - 3)(x + 1)$

Corrigé fiche 3

x		-1		3	
f'(x)	+	//	-	0	+

$$8)f'(x) = 4 \left(\frac{x}{3-x} \right)^3 \left(\frac{3-x+x}{(3-x)^2} \right) = \frac{12x^3}{(3-x)^5}$$

Tous les carrés sont positifs , donc f'(x) est du signe de x (3 - x)

x		0		3	
x	-	0	+		+
(3-x)	+		+	0	-
f'(x)	-	0	+	//	-

$$9)f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+5}} > 0 ; 10)f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{3-x}} < 0$$

$$11)f'(x) = 2(x+3) + \frac{1}{2\sqrt{2+x}}$$

Pour que la racine soit définie , x > - 2 donc x + 3 > 0 et f'(x) > 0

$$; 12)f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} + \frac{1}{\sqrt{2x-3}} > 0$$

Exercice 3

$$1)f'(x) = 3\sqrt{3x+1} + \frac{3(3x+1)}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{9}{2}\sqrt{3x+1} ; 2)f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2x+1}(2x+1)}$$

$$3)f'(x) = \sin x + \cos x ; 4)f'(x) = 2\cos x \sin x ; 5)f'(x) = 1 + \cos x ;$$

$$6)f'(x) = -2\sin x \cos x$$

$$7)f'(x) = -\sin^2 x + \cos^2 x = \cos(2x) ;$$

$$8)f'(x) = 2(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\cos(2x)$$

$$9)f'(x) = 2\cos(2x) ; 10)f'(x) = -3\sin(3x) ; 11)f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$12)f'(x) = 2(x-1)(3-x)^3 - 3(3-x)^2(x-1)^2 = (x-1)(3-x)^2(9-5x)$$

Exercice type 1

1) On a : $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ donc f est croissante sur \mathbb{R}

2) On a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

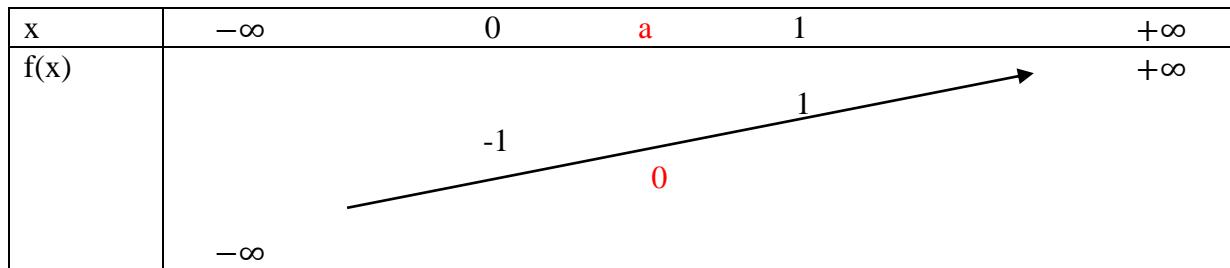
3) La fonction f est continue car polynôme ; elle est strictement croissante sur \mathbb{R}

On a de plus $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ donc 0 est dans $[f(0) ; f(1)]$

Donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , il existe un unique a dans $[0; 1]$ tel que $f(a) = 0$.

4) Le tableau de variations complété donne :

Corrigé fiche 3

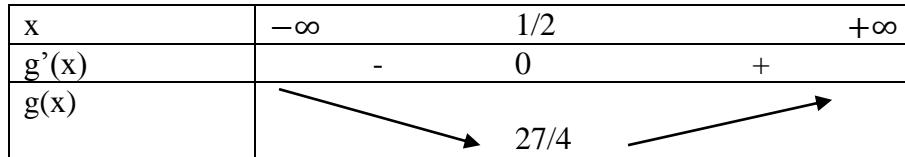


Par lecture du tableau de variations , on a donc : $f(x) < 0$ si $x < a$ et $f(x) > 0$ si $x > a$.

Exercice type 2

1) On a :

$$g'(x) = 2x - 1$$



2) On en déduit que $g(x) > 0$ sur \mathbb{R} car g admet un minimum positif

3) On a :

$$f'(x) = x^2 - x + 7 = g(x) > 0$$

Donc f est croissante sur \mathbb{R}