Suites

Suites arithmétiques et géométriques

- Une suite est arithmétique si et seulement si $u_{n+1} - u_n = r$ avec r réel . Dans ce cas :
  - $u_n = u_0 + nr$
  - $u_0 + ... + u_n = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$
- Une suite est géométrique si et seulement si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$ avec q réel . Dans ce cas :
  - $u_n = u_0 \times q^n$
  - $u_0 + ... + u_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Variations et minoration , majoration

- Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite est croissante .
- Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite est décroissante
- Si la suite est **positive** et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors la suite est croissante .
- Si la suite est **positive** et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors la suite est décroissante .
- Si $u_n - A \leq 0$ alors la suite est majorée par A
- Si $u_n - A \geq 0$ alors la suite est minorée par A

Convergence

- Une suite qui admet une limite finie converge
- Une suite qui n'a pas de limite diverge
- Une suite qui tend vers l'infini diverge
- Une suite croissante majorée converge
- Une suite décroissante minorée converge .

- Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$

- Une suite géométrique de raison comprise strictement entre -1 et 1 tend vers 0 .

- Théorème des gendarmes : si $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite a , alors (v_n) converge et tend vers a .

- Théorème de comparaison : si $u_n \leq v_n$ et si u_n tend vers $+\infty$ alors v_n tend vers $+\infty$

- Théorème du point fixe : si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec (u_n) convergente vers a et f continue alors $f(a) = a$

Limites

Formes indéterminées

Il y a quatre formes indéterminées : $+\infty - \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$ et $0 \times \infty$

Formules à connaitre

- L'addition , la multiplication , la soustraction et la division s'appliquent aux limites .

- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ si n impair

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ si n pair

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Dérivées

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
x	1	u	u'
x^n	nx^{n-1}	u^n	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{u^n}$	$-\frac{nu'}{u^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u+v$	$u'+v'$		
uv	$u'v+uv'$		
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$		
sinx	cosx	sinu	u'cosu
cosx	-sinx	cosu	-u'sinu
tanx	$1+tan^2x=\frac{1}{cos^2x}$	tanu	$u'(1+tan^2u)=\frac{u'}{cos^2u}$
e^x	e^x	e^u	$u'e^u$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$ln(u)$	$\frac{u'}{u}$

Fonction exponentielle

Limites

- $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

Propriétés

- $e^0 = 1$
- $e^{x+y} = e^x e^y$
- $e^x = e^y \iff x = y$
- $e = e^1 \approx 2,71$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^x > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$
- $e^{nx} = (e^x)^n$

Logarithmes

Limites

- $\lim_{x \to +\infty} lnx = +\infty$
- $\lim_{x \to 0} x^n lnx = 0$
- $\lim_{x \to 0} lnx = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \to 1} \frac{lnx}{x-1} = 1$

Propriétés

- lnx est défini si $x > 0$
- $ln(xy) = lnx + lny$
- $ln(e^x) = x$
- $ln\left(\frac{1}{x}\right) = -lnx$
- $e^{lnx} = x \, \forall x > 0$
- $ln(x^n) = nlnx$
- $ln1 = 0$
- $lnx = lny \iff x = y$
- $ln(e) = 1$
- $log_a(x) = \frac{lnx}{lna}$
- $lnx > 0 \iff x > 1$
- $a^x = e^{xlna}$

Fonctions trigonométriques

Formules d'additions et de duplications

- $cos(a+b) = cosacosb - sinasinb$
- $cos(a-b) = cosacosb + sinasinb$
- $sin(a+b) = sinacosb + cosasinb$
- $sin(a-b) = sinacosb - cosasinb$
- $cos(2a) = 2cos^2a - 1$
- $cos(2a) = 1 - 2sin^2a$
- $cos(2a) = cos^2a - sin^2a$
- $sin(2a) = 2sinacosa$

Formules de parité et de périodicité

- $cos(-x) = cosx$
- $sin(-x) = -sinx$
- $sin(x+2\pi) = sinx$
- $cos(x+2\pi) = cosx$

Angles associés

- $cos(x+\pi) = -cosx$
- $sin(x+\pi) = -sinx$
- $cos(\pi-x) = -cosx$
- $sin(\pi-x) = sinx$
- $cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -sinx$
- $cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = sinx$
- $sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = cosx$
- $sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = cosx$

Equations différentielles

- L'équation $y' = ay$ a pour solution $y = ke^{ax}$ avec k réel
- L'équation $y' = ay + b$ a pour solution $y = -\frac{b}{a} + ke^{ax}$ avec k réel

Intégration

- F est une primitive de f si et seulement si $F'(x) = f(x)$
- Si F et G sont deux primitives d'une même fonction , alors il existe une constante k telle que $F = G + k$
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ avec F primitive de f.
- $\displaystyle\int_a^a f(t)\ \mathrm{d}t = 0$
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\ \mathrm{d}t$
- $\displaystyle\int_a^b f(t) + g(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ (Linéarité)
- $\displaystyle\int_a^b kf(t)\ \mathrm{d}t = k\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ avec k réel (Linéarité)
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t$ (Chasles)
- Si $f(x) < g(x)\ \forall x \in [a;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t < \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ (conservation de l'ordre)
- Si $m < f(x) < M\ \forall x \in [a;b]$ alors $\displaystyle m(b-a) < \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t < M(b-a)$ (inégalité de la moyenne)
- La valeur moyenne de f(x) sur [a ;b] est égale à : $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$
- $\displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .
- Si $f(x) < g(x)\ \forall x \in [a;b]$, l'aire du domaine compris entre les courbes de f et g , les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est $\displaystyle\int_a^b (g(t) - f(t))\ \mathrm{d}t$
- (Intégration par parties) $\displaystyle\int_a^b u'v\ \mathrm{d}t = [uv]_a^b - \int_a^b uv'\ \mathrm{d}t$

Combinatoire et dénombrement

- Par convention , $0! = 1$
- $(n+1)! = n! \times (n+1)$
- $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
- $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = n$
- $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-p \end{pmatrix}$
- Relation de Pascal $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ p+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ p+1 \end{pmatrix}$
- $\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = 2^n$

Variables aléatoires

- Soit X une variable aléatoire telle que $p(X = x_i) = p_i$. Alors $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$
- L'espérance est linéaire c'est à dire que : $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$ et $E(aX) = aE(X)$ pour a réel
- Soit X une variable aléatoire telle que $p(X = x_i) = p_i$. Alors : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2$

- Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes . Alors $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ et $V(aX)=a^2V(X)$
- On note $S_n=X_1+X_2+...+X_n$ la variable aléatoire somme de l'échantillon $(X_1;X_2;...;X_n)$
- On note $M_n=\frac{S_n}{n}$ la variable aléatoire moyenne de cet échantillon .
- $E(S_n)=nE(X)$
- $V(S_n)=nV(X)$
- $E(M_n)=E(X)$
- $V(M_n)=\frac{V(X)}{n}$

Probabilités

les formules de base

- $p(A)=\frac{nombre\ elements\ de\ A}{nombre\ total\ d'elements}$
- $p(\overline{A})=1-p(A)$
- $p(A\cup B)+p(A\cap B)=p(a)+p(B)$
- A et B sont incompatibles si et seulement si $A\cap B=\emptyset$

probabilités conditionnelles

- $p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$
- A et B sont indépendants si et seulement si $p(A\cap B)=p(A)p(B)$
- A et B sont indépendants si et seulement si $p_A(B)=p(B)$

loi binomiale

- Un schéma de Bernoulli est la répétition de n expériences identiques et indépendantes à deux issues nommées succès et échec .
- La variable aléatoire X associée au nombre de succès dans un schéma de Bernoulli suit une loi binomiale de paramètres n (nombre d'expériences) et p (probabilité du succès)

- $p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
- $E(X)=np$ et $V(X)=np(1-p)$

loi à densité

- Une fonction f est une densité de probabilité sur [a ;b] si f est continue , positive et $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = 1$
- $p(\alpha < X < \beta) = \int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t$ si f est la densité de probabilité de la variable aléatoire X .
- $p(X=a)=0$
- $p(X \leq a) = p(X < a)$
- $E(X) = \int_a^b t f(t)\ \mathrm{d}t$

loi uniforme

- La densité de probabilité associée à la variable aléatoire suivant une loi uniforme sur [a ;b] est $f(x)=\frac{1}{b-a}$
- $p(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$
- $E(X)=\frac{a+b}{2}$

loi exponentielle

- La variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $k>0$ si la densité de probabilité qui lui est associée est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=ke^{-kx}$
- $p(X>a)=e^{-ka}$
- $p(a<X<b)=e^{-ka}-e^{-kb}$
- $E(X)=\frac{1}{k}$
- $p_{X>h}(X>t+h)=p(X>t)$ (durée de vie sans vieillissement)

Espace

propriétés les plus utilisées

- A , B et C forment un plan si et seulement les points A , B et C ne sont pas alignés
- Deux vecteurs sont colinéaires si leurs coordonnées sont proportionnelles
- Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan
- Si une droite est orthogonale à un plan , elle est orthogonale à n'importe quelle droite du plan .
- Deux plans sont parallèles si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre
- Deux plans parallèles sont coupés par un plan selon deux droites parallèles .

produit scalaire

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times CD \times cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})$
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$
- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

représentations algébriques

- Une équation cartésienne de plan est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ dans laquelle $(a; b; c)$ sont les coordonnées du vecteur normal du plan .
- Une droite n'a pas d'équation cartésienne dans l'espace
- Une représentation paramétrique d'une droite D passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(\alpha; \beta; \gamma)$ est donnée par : $M(x; y; z) \in D \iff \begin{cases} x &= x_A + k\alpha \\ y &= y_A + k\beta \\ z &= z_A + k\gamma \end{cases}$ avec k réel