

1 Théorèmes de convergence



A retenir

Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$

Le principe

Les définitions suffisent

La démonstration

Soit une suite (u_n) croissante non majorée .

- (u_n) non majorée donc pour tout réel A , il existe p tel que $u_p > A$
- La suite est croissante donc pour tout $n > p$, on a : $u_n > u_p > A, \forall A$
- Par définition , puisque pour tout réel A , u_n appartient à un intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

2 Théorème de comparaison



A retenir

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \end{array} \right. \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

Le principe

On utilise les définitions

La démonstration

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ donc **Pour tout réel A , il existe un entier m à partir duquel u_m appartient à $]A; +\infty[$**
- $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang , donc il existe un entier p à partir duquel $u_n \leq v_n$
- Pour que les deux propriétés soient réalisées en même temps , il faut choisir $q = \max\{m; p\}$. Alors , pour tout réel A , pour $n > q$, on a : $v_n \geq u_n > A$ et par la définition , $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

3 Suite géométrique



A retenir

Une suite géométrique de raison strictement supérieure à 1 tend vers ∞ .

Le principe

On va utiliser le théorème de comparaison

La démonstration

- Soit (u_n) une suite géométrique de raison q strictement supérieure à 1. Alors, on peut prendre a réel strictement positif et poser $q = a + 1$. On a donc : $u_n = u_0 q^n = u_0 (1 + a)^n$.
- On va montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + a)^n = +\infty$
 - Montrons d'abord que $(1 + a)^n \geq 1 + na$. On va procéder par récurrence :
 - * Initialisation : pour $n = 1$, c'est immédiat.
 - * Hérédité : **On suppose que $(1 + a)^n \geq 1 + na$ pour un n donné. Alors $(1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n (1 + a) \geq (1 + na)(1 + a) \geq 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a$ car $na^2 > 0$.**
 - $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + na = +\infty$ car $a > 0$
 - Par le théorème de comparaison, on a alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + a)^n = +\infty$
- Etudions maintenant la limite de (u_n) .
 - Si $u_0 > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
 - Si $u_0 < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$