1 Généralisation des vecteurs à l'espace

1.1 Définitions

Définition.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini dans l'espace par sa direction , la droite (AB) , son sens , de A vers B , et sa norme , la longueur AB .

Propriété.
Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont même direction , même sens et même norme .

Propriété.

- $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$
- D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ si et seulement si $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$
- ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$
- I est le milieu de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

1.2 Opérations et combinaisons linéaires

Définition.
Soit un vecteur $\overrightarrow{u}$ et un réel k . Le vecteur produit $k\overrightarrow{u}$ est le vecteur de même direction que $\overrightarrow{u}$, de sens identique à $\overrightarrow{u}$ si k est positif (et de sens opposé si k est négatif) , et de norme $|k|||\overrightarrow{AB}||$

Propriété.

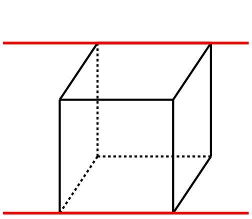
- Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- Soient k et k' deux réels et soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs . Alors :
  - ☐ $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$
  - ☐ $(k + k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$
  - ☐ $k(k'\overrightarrow{u}) = k'(k\overrightarrow{u}) = kk'\overrightarrow{u}$
  - ☐ $k\overrightarrow{u} = 0 \iff k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Définition.
On dit que $\overrightarrow{u}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{v}$ et de $\overrightarrow{w}$ si et seulement s'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{w}$

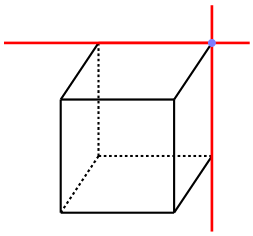
2 Droites de l'espace

2.1 Positions relatives de droites

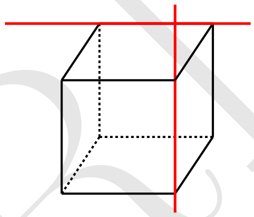
Droites parallèles : leurs vecteurs directeurs sont colinéaires . (dans ce cas , les droites sont coplanaires)



Droites sécantes : leur intersection est un plan . (dans ce cas , les droites sont coplanaires)



Droites non coplanaires : elles ne sont ni parallèles ni sécantes (se méfier de ce qui semble se voir)



2.2 Caractérisation de droites

Définition.
On appelle vecteur directeur d'une droite (AB) , tout vecteur ayant pour direction la droite (AB) . Couramment , $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB) .

Définition.
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$

⚠ *Attention*

La relation de colinéarité ne s'applique pas dans l'espace

Propriété.
Les vecteurs directeurs d'une même droite sont colinéaires .

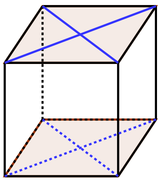
Propriété.
Une droite de l'espace est caractérisée par deux points ou par un vecteur et un point .

Propriété.
Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires .

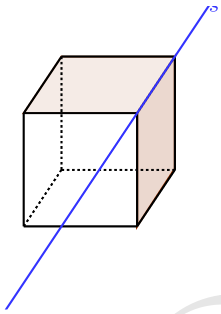
3 Plans de l'espace

3.1 Positions relatives de plans

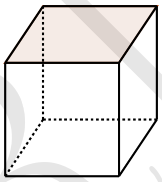
Plans parallèles : deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre



Plans sécants : leur intersection est une droite

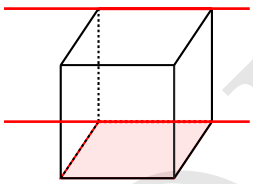


Plans confondus : tous les points de l'un appartiennent à l'autre

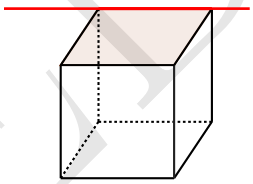


3.2 Positions relatives de droites et de plans

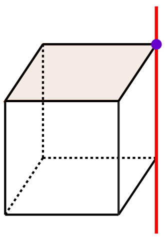
Droite parallèle à un plan : la droite est parallèle à une droite du plan



Droite dans un plan (la droite est aussi parallèle au plan)



Droite et plan sécants : l'intersection est un point



3.3 Caractérisation de plans dans l'espace

Définition.
Un plan dans l'espace est caractérisé par trois points non alignés . On peut aussi définir un plan à l'aide de deux vecteurs non colinéaires et d'un point .

Propriété.
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace . On dit que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{v}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$

4 Bases

4.1 Bases et repères

Définition.
On appelle base de l'espace tout triplet de vecteurs non coplanaires .

Définition.
On appelle repère de l'espace tout quadruplet de la forme $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right)$ où O est un point et $\left(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right)$ une base .

Propriété.
Soit $\left(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right)$ une base . Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace , il existe un unique triplet (a ;b ;c) de réels tel que $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$. (a ;b ;c) sont les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right)$

Propriété.
Soit $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right)$ un repère . Pour tout point M de l'espace , il existe un unique triplet (a ;b ;c) de réels tel que $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$. (a ;b ;c) sont les coordonnées de M dans le repère $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right)$

4.2 Formules

Propriété.
Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

Propriété.
Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$.
Alors le milieu du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$

Propriété.

- Si $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y'; z')$ alors : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}(x + x'; y + y'; z + z')$
- Si $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ alors : $k\overrightarrow{u}(kx; ky; kz)$
- Si $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y'; z')$ alors : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \iff x = x'$ et $y = y'$ et $z = z'$