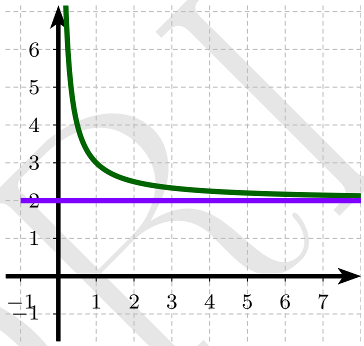
1 Notion de limites pour les fonctions

1.1 Définitions

Définition.
On dit qu'une fonction f tend vers a quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle ouvert qui contient a contient aussi tous les f(x) pour x assez grand .

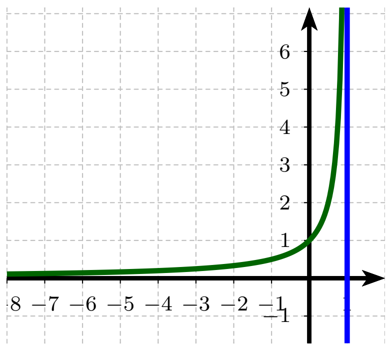
A retenir
Conséquence graphique :
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a \iff$ La courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = a$



Définition.
On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle ouvert du type $]A; \infty[$ contient toutes les valeurs de f(x) pour x assez grand .

Définition.
On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si et seulement si pour tout x appartenant à un intervalle de la forme $]a - e; a + e[$, tout intervalle ouvert du type $]A; \infty[$ contient toutes les valeurs de f(x)

A retenir
Conséquence graphique :
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty \iff$ La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$



1.2 Formules usuelles

- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ si n impair
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ si n pair
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Les règles opératoires s'appliquent aux limites en tenant compte des formes indéterminées

A retenir

Il y a quatre formes indéterminées : $+\infty - \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$ et $0 \times \infty$

Exemple.
Déterminer la limite en 1 de $f(x) = -\dfrac{3}{1-x}$

1.3 Limites de la fonction exponentielle

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Exemple.
Déterminer la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x + x$

2 Théorèmes de comparaison

Propriété.
Théorème des gendarmes : Soient trois fonctions f , g et h définies sur un intervalle I telles que pour tout x de I : $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = b$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$

Propriété.
Théorème de comparaison : si $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$

Exemple.
Déterminer la limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{cosx}{x}$

3 Lever une indétermination

3.1 Avec des expressions simples

On procède comme avec les suites , en factorisant par le terme de plus haut degré

Exemple.
Déterminer la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - x$

3.2 Avec des racines

On utilise la forme conjuguée pour faire apparaitre l'identité remarquable $(a+b)(a-b)$

Exemple.
Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{3x+8} - \sqrt{3x}$

3.3 Avec le nombre dérivé

A retenir

Si la fonction f est dérivable en a alors $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Exemple.

Déterminer : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sinx}{x}$