DS 5 maths complémentaires terminale 18 mars 2021

Exercice 1 (7 points)

1. *Déterminer une primitive de*

   (a) $f(x) = 7x - 6$
   $F(x) = \frac{7}{2}x^2 - 6x$

   (b) $f(x) = 5x^6 - 5x^4 + 8x$
   $F(x) = \frac{5}{7}x^7 - x^5 + 4x^2$

   (c) $f(x) = \frac{2x+4}{x^2+4x-8}$
   $F(x) = ln(x^2 + 4x - 8)$

   (d) $f(x) = (2x-8)(x^2-8x+7)^3$
   $F(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 8x + 7)^4$

2. *Déterminer la primitive F(x) de $f(x) = 5x - 8$ telle que $F(0) = 5$*

   $F(x) = \frac{5}{2}x^2 - 8x + k$ *et* $F(0) = 5$ *donc* $k = 5$ *donc* $F(x) = \frac{5}{2}x^2 - 8x + 5$

3. *Soit* $F(x) = (ax + b)e^{3x-2}$.

   Déterminer a et b tels que F soit une primitive de $f(x) = (6x + 23)e^{3x-2}$

   $F'(x) = (a + 3ax + 3b)e^{3x-2}$ *donc par identification* $3a = 6$ *et* $a + 3b = 23$ *donc* $a = 2$ *et* $b = 7$

Exercice 2 (5 points)

1. *Résoudre l'équation différentielle :* $y' + 9y = 0$

   $y = ke^{-9x}$ *avec k réel*

2. *Déterminer y telle que* $y' - 7y = 0$ *et* $y(0) = 2$

   $y = ke^{7x}$ *donc* $k = 2$

3. *Résoudre l'équation différentielle :* $3y' - 12y + 10 = 0$

   $y' = 4y - \frac{10}{3}$ *donc* $y = \frac{5}{6} + ke^{4x}$ *avec k réel*

4. *Déterminer y telle que :* $2y' - 4y + 10 = 0$ *et* $y(0) = 7$

   $y' = 2y - 5$ *donc* $y = \frac{5}{2} + ke^{2x}$ *et* $\frac{5}{2} + k = 7$ *donc* $k = \frac{9}{2}$

Exercice 3 (8 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = xlnx - 4$ *sur* $]0; +\infty[$

1. *Déterminer la limite de f en 0*

   $\lim_{x \to 0} xlnx = 0$ *par croissance comparée donc* $\lim_{x \to 0} f(x) = -4$

2. *Déterminer la limité de f en* $+\infty$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} xlnx = +\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3. *Calculer la dérivée de f*

   $f'(x) = lnx + 1$

4. *Dresser le tableau de variations de f*

   $lnx + 1 > 0 \iff x > e^{-1}$

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	-4	$\searrow$	$-4-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

5. *Montrer qu'il existe un unique a tel que* $f(a) = 2$ *. Donner un encadrement à 0,01 près de a .*

   La fonction f est continue , strictement croissante sur $]e^{-1}; +\infty[$ *et* $2 \in]-e^{-1}-4; +\infty[$ *donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , il existe un unique a tel que f(a) = 2 .*

   4,18 < a < 4,19

6. *Etudier la convexité de f .*

   $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ *donc f est convexe*