DS 1 maths complémentaires terminale octobre 2020

Exercice 1
Partie A

Tous les ans, au mois de septembre, Richard prélève $8,5$ *tonnes d'algues sur les plages de sa commune. Au 1er septembre 2018, il y avait 230 tonnes d'algues sur ces plages. Tous les ans, entre le 1er octobre et le 1er septembre suivant, la quantité d'algues sur ces plages augmente de 4 %.*

On note u_n *la quantité en tonnes d'algues présente sur les plages au 1er septembre de l'année* $2018+n$. *Ainsi,* $u_0 = 230$.

1. *On admet que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,04\, u_n - 8,84$.

   Le tonnage d'algues au 1er septembre 2019 est $u_1 = 1,04u_0 - 8,84 = 1,04 \times 230 - 8,84 = 230,36$.

2. *Soit* (v_n) *la suite définie par, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 221$. *On a donc* $u_n = v_n + 211$.

   (a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 221 = 1,04u_n - 8.84 - 221 = 1,04\,(v_n + 221) - 229,84 = 1,04v_n + 229,84 - 229,84$
   $= 1,04v_n$
   $v_0 = u_0 - 221 = 230 - 221 = 9$
   La suite (v_n) *est donc géométrique de raison* $q = 1,04$ *et de premier terme* $v_0 = 9$.

   (b) *On en déduit que, pour tout* n, *on a:* $v_n = v_0 \times q^n = 9 \times 1,04^n$.

   (c) *Comme* $u_n = v_n + 221$, *on déduit que, pour tout* n *de* $\mathbb{N}$, $u_n = 221 + 9 \times 1,04^n$.

3. *'Pour savoir si la quantité d'algues présentes sur ces plages dépassera un jour* 250 *tonnes,on regarde les valeurs à la calculatrice et on constate que pour* $n = 30$ *la quantité dépasse 250 . Donc en 2048 .*

Partie B

Pour développer son entreprise, à partir du 1er septembre 2019, Richard a besoin de 10 % d'algues de plus que l'année précédente. On rappelle qu'au 1er septembre 2018, il disposait de 230 tonnes d'algues et qu'il en avait consommé $8,5$ *tonnes en septembre 2018. Dans cette nouvelle situation, il disposera de* $230,36$ *tonnes d'algues au 1er septembre 2019 et en utilisera* $9,35$ *tonnes pendant ce mois. Richard souhaite étudier la quantité d'algues sur les plages concernées pour les 16 prochaines années selon ce modèle.*

Pour cela il rédige l'algorithme ci-contre.

1. *La variable A représente le tonnage d'algues disponibles l'année $2018+n$, et B représente le tonnage d'algues consommées la même année.*

2.

K	*A*	*B*
	230	*8,5*
1	$230,36$	$9,35$
2	$229,85$	$10,29$
3	*228,35*	*11,31*
4	*225,72*	*12,44*
5	*221,80*	*13,69*
6	*216,44*	*15,06*
7	*209,43*	*16,56*
8	*200,58*	*18,22*
9	*189,66*	*20,04*
10	*176,40*	*22,05*
11	*160,53*	*24,25*
12	*141,73*	*26,68*
13	*119,65*	*29,34*
14	*93,92*	*32,28*
15	*64,11*	*35,51*
16	*29,75*	*39,06*

$A \leftarrow 230$
$B \leftarrow 8,5$
Pour K allant de 1 à 16
  $A \leftarrow (A-B)\times 1,04$
  $B \leftarrow B \times 1,1$
Fin pour

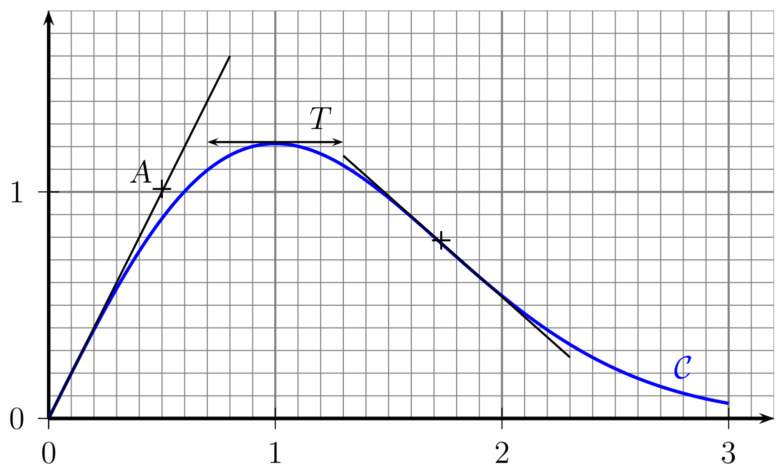
3. *En 2034, il y aura moins d'algues disponibles que ce que veut utiliser Richard car $29,75 < 39,06$.*

Exercice 2

On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [0 ; 3]. On note f' la fonction dérivée de f.

La droite $\mathcal{D}$ est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 ; elle passe par le point A de coordonnées (0,5 ; 1).

La tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.



Partie A

Dans cette partie les réponses seront obtenues par lecture graphique.

1. *La droite* $\mathcal{D}$ *passe par le point* O *et le point* $A\,(0,5\ ;\ 1)$.
   Son équation est donc de la forme $y = mx$ *avec* $m = \dfrac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \dfrac{0,5}{1} = 2$.
   La droite $\mathcal{D}$ *a donc pour équation* $y = 2x$.
2. *Au point d'abscisse 1, la courbe* $\mathcal{C}$ *admet une tangente horizontale* T*, donc* $f'(1) = 0$.
3. *Il semble que* $x \in [0,5; 1,5]$

Partie B

La fonction f *est définie sur l'intervalle [0 ; 3] par* $f(x) = 2xe^{-0,5x^2}$

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-0,5x^2} = 0$ *donc par croissance comparée* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0,5x^2} = 0$ *donc par croissance comparée* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
3. *La courbe de f admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale*
4. $f'(x) = 2 \times e^{-0,5x^2} + 2x \times (-0,5 \times 2x)\, e^{-0,5x^2} = (2 - 2x^2)\, e^{-0,5x^2}$
5. *de variation.* $f'(x) = (2 - 2x^2)\, e^{-0,5x^2}$*; or* $e^{-0,5x^2} > 0$ *sur* $\mathbb{R}$ *donc* $f'(x)$ *est du signe de* $2 - 2x^2$.
   $2 - 2x^2 = 2(1 - x^2) = 2(1 - x)(1 + x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-1,21$	$\nearrow$	$1,21$	$\searrow$	0

6. $y = f'(0)(x - 0) + f(0) \iff y = 2x + 0 \iff y = 2x$

Partie C

En Europe, les observateurs d'une maladie nécessitant une hospitalisation considèrent qu'ils peuvent modéliser par cette fonction f *l'évolution du nombre de lits occupés par des malades pendant les trois mois d'hiver.*

Pour tout x *appartenant à l'intervalle [0 ; 3],* $f(x)$ *représente le nombre de lits occupés, exprimé en million, à l'instant* x*, exprimé en mois.*

Un journal affirme que cet hiver:

- *Le nombre de lits occupés lors du pic de la maladie a dépassé le million.*

  Le maximum de la fonction f est atteint en $x = 1$ et vaut $f(1) \approx 1,21$; donc le nombre de lits occupés lors du pic de la maladie est de $1,21$ million.

  L'affirmation est **vraie**.