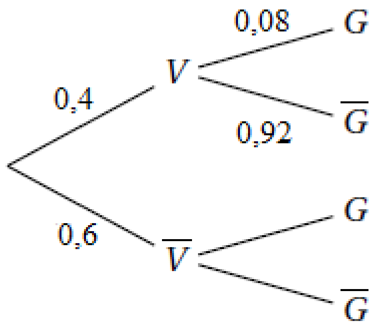
Corrigé du Bac Blanc

Ex 1 : Partie A

1) D'après les données : $\boldsymbol{P(G) = 0,2}$.



2) $P(\mathrm{G} \cap \mathrm{V}) = P(\mathrm{V}) \times P_{\mathrm{V}}(\mathrm{G}) = 0{,}4 \times 0{,}08 = \mathbf{0,032}$.

3) On doit calculer $P_{\overline{\mathrm{V}}}(\mathrm{G}) = \frac{P(\overline{\mathrm{V}} \cap \mathrm{G})}{P(\overline{\mathrm{V}})}$ mais ni l'arbre ni les données de l'énoncé ne permettent de connaître la valeur de $P\left(\overline{\mathrm{V}} \cap \mathrm{G}\right)$.

On utilise la formule de probabilité totale :

$$P(\mathrm{G}) = P(\mathrm{V} \cap \mathrm{G}) + P\left(\overline{\mathrm{V}} \cap \mathrm{G}\right)$$
$$0{,}2 = 0{,}032 + P\left(\overline{\mathrm{V}} \cap \mathrm{G}\right)$$
$$P\left(\overline{\mathrm{V}} \cap \mathrm{G}\right) = 0{,}2 - 0{,}032 = 0{,}168$$

Donc $P_{\overline{\mathrm{V}}}(\mathrm{G}) = \frac{P(\overline{\mathrm{V}} \cap \mathrm{G})}{P(\overline{\mathrm{V}})} = \frac{0{,}168}{0{,}6} = \mathbf{0,28}$.

Partie B

1) La variable aléatoire X suit la **loi binomiale** de paramètres $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{p = 0,4}$.

2a) Pour calculer $P(X = 15)$ on pouvait utiliser la formule de la loi binomiale : $\binom{40}{15} \times 0{,}4^{15} \times 0{,}6^{25} \approx \mathbf{0,123}$ ou bien la calculatrice : binomFdp(40 , 0.4 , 15).

b) On demande $P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19)$. Pour calculer $P(X \leq 19)$, on utilise la calculatrice : binomFRép(40 , 0.4 , 19) ≈ 0,870. Donc $P(X \geq 20) \approx 1 - 0{,}870 \approx \mathbf{0,130}$.

Partie C

1) Pour démontrer l'indépendance de $\overline{\mathrm{A}}$ et de B, il faut prouver que $P\left(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}\right) = P\left(\overline{\mathrm{A}}\right) \times P(\mathrm{B})$.

D'après la formule de probabilité totale : $P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + P\left(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}\right)$ donc $P\left(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}\right) = P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ mais comme A et B sont supposés indépendants, $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B})$ donc :

$$P\left(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}\right) = P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B}) = \left(1 - P(\mathrm{A})\right) \times P(\mathrm{B})$$

D'après les pré-requis, $1 - P(\mathrm{A}) = P\left(\overline{\mathrm{A}}\right)$ donc $P\left(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}\right) = P\left(\overline{\mathrm{A}}\right) \times P(\mathrm{B})$ ce qui prouve que $\overline{\mathrm{A}}$ et B sont bien indépendants.

2) Comme les événements A et B sont supposés indépendants, les événements A et $\overline{\mathrm{B}}$ le sont également.

$$P\left(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}\right) = P(\mathrm{A}) \times P\left(\overline{\mathrm{B}}\right) = P(A) \times \left(1 - P(\mathrm{B})\right) = 0{,}22 \times (1 - 0{,}15) = \mathbf{0,187}.$$

Ex 2 : Partie A

1) Dans la cellule B3, on peut entrer la formule : **=B2/(B2+8)** puis recopier vers le bas.

2) Il semble que la suite (u_n) soit strictement **décroissante**.

3) Il semble que la suite (u_n) admette pour **limite 0**.

4) En langage naturel :

```
U ← 1
Pour N allant de 1 à 30 faire
    U ← U/(U + 8)
Fin Pour
Afficher U
```

En Python :

```
u = 1
for n in range(30) :
    u = u/(u + 8)
print(u)
```

Partie B

1) *Initialisation* : $u_0 = 1 > 0$ est vérifié.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier n, $u_n > 0$. On souhaite démontrer que $u_{n+1} > 0$.

Or $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+8}$, mais par hypothèse de récurrence u_n, et donc aussi $u_n + 8$, sont strictement positifs, leur quotient l'est donc aussi, ce qui signifie que $u_{n+1} > 0$. La propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété $u_n > 0$ est vraie pour tout entier naturel n.

2) $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{u_n+8} - u_n = \frac{u_n}{u_n+8} - \frac{u_n(u_n+8)}{u_n+8} = \frac{u_n - u_n^2 - 8u_n}{u_n+8} = \frac{-u_n^2 - 7u_n}{u_n+8} < 0$ car, d'après **B1)**, on sait que $u_n > 0$ donc $-u_n^2 - 7u_n < 0$ et $u_n + 8 > 0$. La suite (u_n) est donc **strictement décroissante**.

3) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle est **convergente**.

Partie C

1) $v_{n+1} = 1 + \frac{7}{u_{n+1}} = 1 + \frac{7}{\frac{u_n}{u_n+8}} = 1 + 7 \times \frac{u_n+8}{u_n} = \frac{u_n+7u_n+56}{u_n} = \frac{8u_n+56}{u_n} = \frac{8(u_n+7)}{u_n} = 8\left(1+\frac{7}{u_n}\right) = 8v_n$

Donc la suite (v_n) est **géométrique** de raison $\boldsymbol{q = 8}$ et de premier terme $\boldsymbol{v_0} = 1 + \frac{7}{u_n} = 1 + \frac{7}{1} = \mathbf{8}$.

2) On déduit de ce qui précède que $v_n = v_0 \times q^n = 8 \times 8^n = 8^{n+1}$.

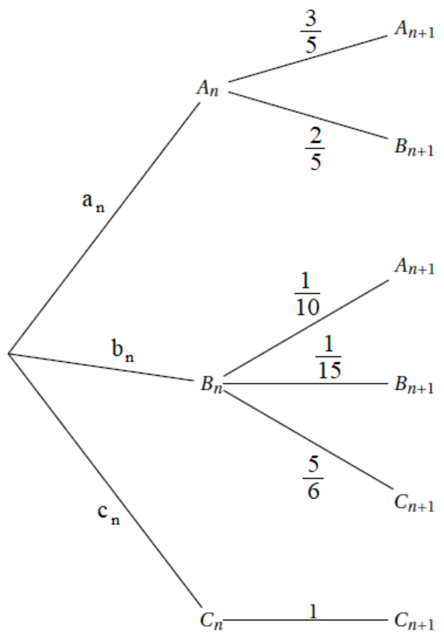
Par ailleurs, l'égalité $v_n = 1 + \frac{7}{u_n}$ implique $v_n - 1 = \frac{7}{u_n}$ puis $\frac{1}{v_n-1} = \frac{u_n}{7}$ et enfin $u_n = \frac{7}{v_n-1} = \boldsymbol{\frac{7}{8^{n+1}-1}}$.

3) Comme $8 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 8^{n+1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4) Comme la suite (u_n) tend vers 0, on sait qu'à partir d'un certain rang, u_n appartient à l'intervalle ouvert $]-10^{-18}\,;10^{-18}[$ contenant la limite 0. Cela prouve l'existence de n_0.

D'après la calculatrice $u_{19} \approx 6 \times 10^{-18} > 10^{-18}$ et $u_{20} \approx 8 \times 10^{-19} < 10^{-18}$, donc $\boldsymbol{n_0 = 20}$.

__Ex 2 (spécialité) :__ **Partie A**



1b) D'après la formule de probabilité totale :

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1})$$
$$= a_n \times \frac{3}{5} + b_n \times \frac{1}{10} + c_n \times 0 = \boldsymbol{\frac{3}{5}a_n + \frac{1}{10}b_n}$$
$$b_{n+1} = P(B_{n+1}) = P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) + P(C_n \cap B_{n+1})$$
$$= a_n \times \frac{2}{5} + b_n \times \frac{1}{15} + c_n \times 0 = \boldsymbol{\frac{2}{5}a_n + \frac{1}{15}b_n}$$

c) D'après le **1b)**, pour tout entier n, $U_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{15} \end{pmatrix} U_n$.

Or $M = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{18}{30} & \frac{3}{30} \\ \frac{12}{30} & \frac{2}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$ donc $\boldsymbol{U_{n+1} = MU_n}$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $M^0 U_0 = Id\ U_0 = U_0$, est vérifié.

Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang n :

$$U_{n+1} = MU_n = M\ M^n U_0 = M^{n+1} U_0$$

Conclusion : $U_n = M^n U_0$ est vrai pour tout entier naturel n.

2a) $U_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

b) $M^2 = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{900}\begin{pmatrix} 18 \times 18 + 3 \times 12 & 18 \times 3 + 3 \times 2 \\ 12 \times 18 + 2 \times 12 & 12 \times 3 + 2 \times 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{900}\begin{pmatrix} 360 & 60 \\ 240 & 40 \end{pmatrix}$

$= \frac{20}{900}\begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$ donc $M^2 = \frac{30}{45}M = \frac{2}{3}M$. On obtient ainsi $\boldsymbol{k = \frac{2}{3}}$.

c) *Initialisation* : Pour $n = 1$, $M^0 = Id$ et $\left(\frac{2}{3}\right)^{1-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = Id$, la propriété est vérifiée au premier rang.

Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang $n \geq 1$, comme $n - 1 \geq 0$ on peut écrire :

$M^{n+1} = M^2 M^{n-1} = kM\ M^{n-1} = kM^n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} M = \left(\frac{2}{3}\right)^n M$, la propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété $\boldsymbol{M^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} M}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) $U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 18 \\ 12 \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\begin{pmatrix} \frac{18}{30} \\ \frac{12}{30} \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}} \\ \boldsymbol{\frac{2}{5} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}} \end{pmatrix}$.

3a) $P(C_n) = c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - \frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{2}{5} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 1 - \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \boldsymbol{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$.

b) $\boldsymbol{n = 7}$ car pour $n = 6$; $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{6-1} \approx 0{,}87 < 0{,}9$ donc $n = 7$; $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{7-1} \approx 0{,}91 > 0{,}9$. Fin.

Il faut ainsi attendre **7 heures** pour que la probabilité que la bouteille soit rejetée à l'océan soit au moins égale à 0,9.

__Ex 3 :__ **1a)** $f(0) = 3 \times 0 \times \mathrm{e}^0 + 2 = \mathbf{2}$ **µg/mL**.

b) Au bout de 12 secondes, soit $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ minutes, le taux de vasopressine est $f\left(\frac{1}{5}\right) = 3 \times \frac{1}{5} \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}} + 2 = \frac{3}{5}\mathrm{e}^{-\frac{1}{20}} + 2 = \mathbf{2{,}57}$ **µg/mL** qui est supérieur à 2,5 µg/mL : ce taux n'est pas normal.

c) On pose la nouvelle variable $\boldsymbol{X = -\frac{1}{4}t}$ ou encore $t = -4X$. Si $t \to +\infty$ alors $X \to -\infty$, on a donc :

$\lim\limits_{t\to+\infty} 3t\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + 2 = \lim\limits_{X\to-\infty} 3(-4X)\mathrm{e}^X + 2 = \lim\limits_{X\to-\infty} -12X\mathrm{e}^X + 2.$

Or, par <u>croissance comparée</u> $\lim\limits_{X\to-\infty} X\mathrm{e}^X = 0$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 2}$.

Lorsque t devient grand, le taux de vasopressine **se rapproche du taux initial** 2 µg/mL.

2) Pour dériver f, on utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$ et pour dériver $\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}$ on utilise la formule $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^{\mathrm{u}}$ qui donne $\left(-\frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}$. Donc $f'(t) = 3 \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + 3t \times \left(-\frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} = \left(1 - \frac{t}{4}\right) \times 3\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} = \boldsymbol{\frac{3}{4}(4 - t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}}$.

3a) Une exponentielle est toujours positive, et $\frac{3}{4}$ aussi, donc $f'(t)$ a le signe de $4 - t$.

t	0		4		$+\infty$
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	2	$\nearrow$	$12\mathrm{e}^{-1} + 2$	$\searrow$	2

b) Le taux de vasopressine est maximal au bout de **4 minutes**, ce taux est $12\mathrm{e}^{-1} + 2 \approx \mathbf{6{,}41}$ **µg/mL**.

4a) f est une fonction <u>continue</u> en tant que somme, produit et composée de fonctions continues. Elle est <u>strictement croissante</u> sur [0 ; 4] et <u>2,5 est compris entre 2 et 6,41</u> donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (CTVI), l'équation $f(t) = 2{,}5$ admet une unique solutio t_0 sur [0 ; 4].

D'après la méthode par balayage $\boldsymbol{t_0 \approx 0{,}174}$ (ou 0,175).

b) Le taux de vasopressine est supérieur à 2,5 µg/mL lorsque t est compris entre t_0 et t_1 c'est-à-dire pendant $t_1 - t_0 \approx 18{,}930 - 0{,}174 \approx \mathbf{18{,}756}$ **minutes** (ou 18,755 minutes).

__Ex 4 :__ **Partie A**

1) $\Delta = (-14)^2 - 4 \times 25 \times 25 = -2304 < 0$. L'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \frac{14+i\sqrt{2304}}{2\times25} = \frac{14+48i}{50} = \boldsymbol{\frac{7}{25} + \frac{24}{25}i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \boldsymbol{\frac{7}{25} - \frac{24}{25}i}$.

2) $|z_1| = \sqrt{\left(\frac{7}{25}\right)^2 + \left(\frac{24}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{625} + \frac{576}{625}} = \sqrt{1} = \mathbf{1}$ et $|z_2| = |\overline{z_1}| = |z_1| = \mathbf{1}$.

3) Comme z_1 a pour module $r = 1$ et comme argument α, $z_1 = \boldsymbol{\mathrm{e}^{i\alpha}}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \boldsymbol{\mathrm{e}^{-i\alpha}}$.

4) $\cos\alpha = \frac{7}{25} = 0{,}28$ et $\sin\alpha = \frac{24}{25} = 0{,}98$ donc c'est **le point A** qui a pour affixe z_1 et, par symétrie par rapport à l'axe des réels, c'est le **point D** qui a pour affixe $\overline{z_1} = z_2$.

Partie B

1) Faux $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2019} = \left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2019} = \mathrm{e}^{2019i\frac{\pi}{3}} = \mathrm{e}^{673i\pi} = -1$ car 673 est impair et donc $673\pi = \pi + 2k\pi$ d'où $\mathrm{e}^{673i\pi} = \mathrm{e}^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$.

2) Vrai $z = \frac{1}{6}(2 + 5i)$ a pour module $|z| = \left|\frac{1}{6}\right| \times |2 + 5i| = \frac{1}{6}\sqrt{2^2 + 5^2} = \frac{\sqrt{29}}{6} \approx 0{,}9$.

Comme $-1 < |z| < 1$, la limite de la suite géométrique de terme général $|z|^n$ est égale à 0.

3) Vrai $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = (1 - \sin^2(a)) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a)$. On en déduit que : $2\sin^2(a) = 1 - \cos(2a)$ et donc $\sin^2(a) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2a)) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{7}{25}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{18}{25} = \frac{9}{25}$. Donc $\sin(a) = \frac{3}{5}$ ou bien $-\frac{3}{5}$, mais comme $a \in [-\pi ; 0]$, $\sin(a)$ est négatif. La seule possibilité est donc $\sin(a) = -\frac{3}{5}$.