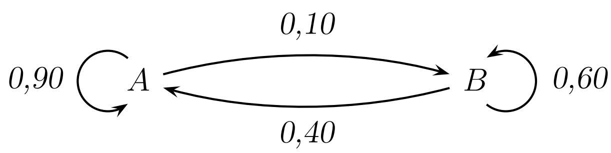
corrigé DS 1 spécialité TS 9 octobre 2018

Exercice 1 (15 points)

1. *On représente la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B:*



2. *D'après le texte:* $\begin{cases} a_{n+1} = & 0,9\,a_n + 0,4\,b_n \\ b_{n+1} = & 0,1\,a_n + 0,6\,b_n \end{cases}$

   Ce qui équivaut à: $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$

   La matrice de transition M associée à ce graphe est donc $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$

3. (a) *On trouve à la calculatrice* $M^4 = \begin{pmatrix} 0,8125 & 0,1875 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}$

   (b) *La probabilité que la personne interrogée fasse son 5ième achat sur internet est* a_5.

   D'après le cours, on sait que, pour tout $n \geqslant 1$, $P_n = P_1 \times M^{n-1}$ donc
   $P_5 = P_1 \times M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8125 & 0,1875 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8125 & 0,1875 \end{pmatrix}$;
   on en déduit que $a_5 = 0,8125$ et $b_5 = 0,1875$.

   La probabilité que la personne interrogée fasse son 5ième achat sur internet est donc $0,8125$.

4. *On note $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable associé à ce graphe.*

   (a) *Comme P est un état du système, on peut dire que $a + b = 1$.*

   P est un état stable donc $P = P \times M$ ce qui équivaut à:
   $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9a + 0,4b & 0,1a + 0,6b \end{pmatrix} \iff$
   $\begin{cases} a = & 0,9a + 0,4b \\ b = & 0,1a + 0,6b \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = & -0,1a + 0,4b \\ 0 = & 0,1a - 0,4b \end{cases} \iff 0,1a - 0,4b = 0$

   Donc a et b vérifient le système $\begin{cases} 0,1a & - & 0,4b & = & 0 \\ a & + & b & = & 1 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} 0,1a & - & 0,4b & = & 0 \\ a & + & b & = & 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0,1a = & 0,4b \\ a + b = & 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = & 4b \\ a + b = & 1 \end{cases} \iff$
   $\begin{cases} a = & 4b \\ 4b + b = & 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = & 4b \\ b = & 0,2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = & 0,8 \\ b = & 0,2 \end{cases}$

(c) *À long terme, la probabilité que cette personne fasse ses achats sur internet tend vers* a *donc vers* $0,8$.

5.

6. *D'après le contexte, on peut dire que, pour tout* n, $a_n + b_n = 1$ *donc* $b_n = 1 - a_n$.

   On sait également que, pour tout n, $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,4b_n$;

   donc $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,4(1 - a_n) = 0,9a_n + 0,4 - 0,4a_n = 0,5a_n + 0,4$

Exercice 2 (5 points)

Résoudre de façon matricielle en expliquant votre démarche , le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 8 \\ -3x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

Le système s'écrit alors : $AX = B \iff X = A^{-1}B$ *et à la calculatrice , on obtient :* $x = 1$, $y = -2$ *et* $z = 3$