$\boxed{DM\ 7}$

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009 \mod 10000$.

Partie A

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16.
2. En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009 \mod 16$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 2009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$.

1. (a) Démontrer que u_0 est divisible par 5.
   (b) Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel n,
   $$u_{n+1} = u_n \left[{u_n}^4 + 5\left({u_n}^3 + 2{u_n}^2 + 2u_n + 1\right)\right].$$
   (c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 5^{n+1}.
2. (a) Vérifier que $u_3 = 2009^{250} - 1$ puis en déduire que $2009^{250} \equiv 1 \mod 625$.
   (b) Démontrer alors que $2009^{8001} \equiv 2009 \mod 625$.

Partie C

1. En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que $2009^{8001} - 2009$ est divisible par 10000.
2. Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009.