

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $3n^3 - 11n + 48$  est divisible par  $n + 3$ .  
(b) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $3n^2 - 9n + 16$  est un entier naturel non nul.

2. Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls  $a$ ,  $b$  et  $c$ , l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(bc - a ; b).$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}(3n^3 - 11n ; n + 3) = \text{PGCD}(48 ; n + 3).$$

4. (a) Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.  
(b) En déduire l'ensemble des entiers naturels  $n$  tels que  $\frac{3n^3 - 11n}{n + 3}$  soit un entier naturel.