DM 3

Étant donné un entier naturel $n \geqslant 2$, on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels $x,\ y$ et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1$ modulo 2^n.

Partie A : Étude de deux cas particuliers

1. Dans cette question on suppose $n = 2$. Montrer que 1, 3 et 5 satisfont à la condition précédente.

2. Dans cette question, on suppose $n = 3$.

   (a) Soit m un entier naturel. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant le reste r de la division euclidienne de m par 8 et le reste R de la division euclidienne de m^2 par 8.

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R								

   (b) Peut-on trouver trois entiers naturels $x,\ y$ et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7$ modulo 8 ?

Partie B Étude du cas général où $n \geqslant 3$

Supposons qu'il existe trois entiers naturels $x,\ y$ et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1$ modulo 2^n.

1. Justifier le fait que les trois entiers naturels $x,\ y$ et z sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.

2. On suppose que x et y sont pairs et que z est impair. On pose alors $x = 2q$, $y = 2r,\ z = 2s + 1$ où $q,\ r,\ s$ sont des entiers naturels.

   (a) Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1$ modulo 4.

   (b) En déduire une contradiction.

3. On suppose que $x,\ y,\ z$ sont impairs.

   (a) Prouver que, pour tout entier naturel k non nul, $k^2 + k$ est divisible par 2.

   (b) En déduire que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3$ modulo 8.

   (c) Conclure.