

On appelle (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme  $9 + a^2$  où  $a$  est un entier naturel non nul ; par exemple  $10 = 9 + 1^2$  ;  $13 = 9 + 2^2$  etc.

On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

1. Étude de l'équation d'inconnue  $a$  :  $a^2 + 9 = 2^n$  où  $a \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 4$ .
  - (a) Montrer que si  $a$  existe,  $a$  est impair.
  - (b) En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.
2. Étude de l'équation d'inconnue  $a$  :  $a^2 + 9 = 3^n$  où  $a \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ .
  - (a) Montrer que si  $n \geq 3$ ,  $3^n$  est congru à 1 ou à 3 modulo 4.
  - (b) Montrer que si  $a$  existe, il est pair et en déduire que nécessairement  $n$  est pair.
  - (c) On pose  $n = 2p$  où  $p$  est un entier naturel,  $p \geq 2$ . Déduire d'une factorisation de  $3^n - a^2$ , que l'équation proposée n'a pas de solution.
3. Étude de l'équation d'inconnue  $a$  :  $a^2 + 9 = 5^n$  où  $a \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .
  - (a) En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation n'a pas de solution si  $n$  est impair.
  - (b) On pose  $n = 2p$ , en s'inspirant de **2 c** démontrer qu'il existe un unique entier naturel  $a$  tel que  $a^2 + 9$  soit une puissance entière de 5.