DS spé 27/02/2017

Mathématiques

On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires.

On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U à la fin du n-ième tirage.

1. **a.** Traduire par une phrase la probabilité $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)$ puis déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)\,,P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)\ \text{et}\ P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)\,.$$

$P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)$ est la probabilité qu'il y ait exactement une blanche dans l'urne U après le $(n+1)-$ième tirage sachant qu'il y en avait exactement une au $n-$ième tirage

$P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=\dfrac{1}{2}$ car il s'agit de choisir une blanche dans chaque urne avec une probabilité $\dfrac{1}{4}$ ou de choisir une boule noire dans chaque urne avec une probabilité de $\dfrac{1}{4}$ pour que la situation reste inchangée.

$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)=1$ car cela signifie que U ne contient que des boules noires et que l'on cherche la probabilité que l'urne V nous redonne une blanche (probabilité =1 car V ne contient que des blanches)

$P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)=1$ car cela signifie que U ne contient que des boules blanches et que l'on cherche la probabilité que l'urne V nous redonne une noire (probabilité =1 car V ne contient que des noires)

b. Exprimer $P(X_{n+1}=1)$ en fonction de $P(X_n=0)$, $P(X_n=1)$ et $P(X_n=2)$.

$(X_n=0)$, $(X_n=1)$ et $(X_n=2)$ forment une partition de l'univers de départ du $(n+1)-$ième tirage

on a donc

$$P(X_{n+1}=1)=P\Big((X_{n+1}=1)\cap(X_n=0)\Big)+P\Big((X_{n+1}=1)\cap(X_n=1)\Big)+P\Big((X_{n+1}=1)\cap(X_n=2)\Big)$$

$$=P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)\times P(X_n=0)+P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)\times P(X_n=1)+P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)\times P(X_n=2)$$

$$=P(X_n=0)+\frac{1}{2}P(X_n=1)+P(X_n=2)$$

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n la matrice ligne définie par :

$$R_n=\begin{pmatrix}P(X_n=0) & P(X_n=1) & P(X_n=2)\end{pmatrix}$$

et on considère M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note R_0 la matrice ligne $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On admettra par la suite que, pour tout entier naturel n, $R_{n+1} = R_n \times M$.

Déterminer R_1 et justifier que, pour tout entier naturel n, $R_n = R_0 \times M^n$.

$R_1 = R_0 \times M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Démonstration par récurrence de $\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = R_0 \times M^n$

Initialisation : $M^0 = I_3$ et $R_0 \times I_3 = R_0$

hérédité : supposons que pour tout entier naturel k on ait $R_k = R_0 \times M^k$

Alors $R_{k+1} = R_k \times M = R_0 \times M^k \times M = R_0 \times M^{k+1}$

la propriété est donc héréditaire à partir du rang 0 et vraie au rang 0 donc on a bien d'après le principe de récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = R_0 \times M^n$

3. On admet que $M = P \times D \times P^{-1}$ avec :

$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Établir que, pour tout entier naturel n, $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

Initialisation : $M^0 = I_3$ et $P \times D^0 \times P^{-1} = P \times I_3 \times P = P \times P^{-1} = I_3$

Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel k tel que $M^k = P \times D^k \times P^{-1}$

Alors $M^{k+1} = M^k \times M = R_k \times M = P \times D^k \times P^{-1} \times M = P \times D^k \times P^{-1} \times P \times D \times P^{-1} = P \times D^k \times D \times P^{-1} = P \times D^{k+1} \times P^{-1}$

la propriété est donc héréditaire à partir du rang 0 et vraie au rang 0 donc on a bien :

$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = P \times D^n \times P^{-1}$

On admettra que, pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. **a.** Calculer $D^n \times P^{-1}$ en fonction de n.

$$D^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n & \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} & \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

b. Sachant que $R_0P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, déterminer les coefficients de R_n en fonction de n.

$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = R_0 \times M^n = R_0 \times P \times D^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

On a donc $R_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 0)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 1)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 2)$.
Interpréter ces résultats.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

Donc par produit et somme $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 0) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 2) = \frac{1}{6}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 1) = \frac{2}{3}$

Cela signifie que la probabilité que les urnes se retrouvent dans la situation initiale se stabilise vers $\frac{1}{6}$ quand n devient grand

la probabilité que les urnes soient « monochrome » se stabilise vers $\frac{1}{3}$: $\left(\frac{1}{6} \text{ pour chaque couleur}\right)$