

Corrigé DM n° 7

Exercice 173 page 131

Partie A

1) $g'(x) = e^x + 1 > 0$ donc g croissante

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

2) La fonction g est continue, strictement croissante, 0 appartient à l'intervalle image donc par le CTVI, il existe un unique a tel que $g(a) = 0 : -1,28 < a < -1,27$

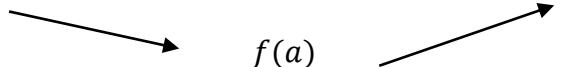
3) Signe de g :

x		a	
$g(x)$	-	0	+

Partie B

$$1) f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(e^x + 1) - e^x(xe^x)}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x + xe^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x(e^x + 1 + x)}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

$$2) g(a) = 0 \Leftrightarrow e^a = -a - 1 \text{ donc } f(a) = \frac{a(-a - 1)}{-a - 1 + 1} = a + 1$$

$-0,28 < f(a) < -0,27$

$$3) y = \frac{1}{2}x$$

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{xe^x}{e^x + 1} - \frac{1}{2}x = \frac{x(e^x - 1)}{2(e^x + 1)}$$

$e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ donc l'expression est du signe de $x(e^x - 1)$

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

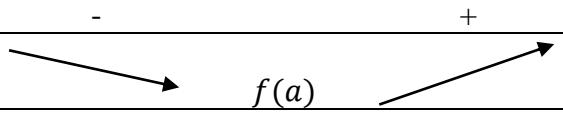
$$\text{donc } f(x) - \frac{1}{2}x > 0 \text{ pour tout } x$$

Conclusion : la courbe est au dessus de sa tangente

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \text{ par cc donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

La courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$

$$5) f(x) = \frac{x}{1 + e^{-x}} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	0		$+\infty$

Exercice 175 page 131

$$M(a; 2e^{3a}) ; H(a; 0)$$

$$T: y = 6e^{3a}(x-a) + 2e^{3a} \text{ donc } y = 6e^{3a}x - 6ae^{3a} + 2e^{3a}$$

$$P : 6e^{3a}x - 6ae^{3a} + 2e^{3a} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6a-2}{6} = a - \frac{1}{3} \text{ donc } P\left(a - \frac{1}{3}; 0\right)$$

$$PH^2 = \frac{1}{9} \text{ donc } PH = \frac{1}{3}$$

Poly n° 115

$$f(x) = a - ae^{bx}$$

$$(OA) : y = x \text{ donc } f'(0) = 1 \text{ donc } -ab = 1$$

La droite d'équation $y = 4$ est asymptote horizontale à C donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} a(1 - e^{bx}) = 4 \Leftrightarrow a = 4 \text{ et } b < 0$$

Conclusion : $a = 4$ et $b = -1/4$

Poly n° 3

On doit donc étudier l'équation : $me^{-x} = -x^2 + 2x - 1 = -(x^2 - 2x + 1) = -(x-1)^2$
 $e^x > 0$ et $(x-1)^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ donc $m \leq 0$

On peut donc déjà affirmer que si $m > 0$, il n'y a pas de solution.

Si $m = 0$, il y a une solution : $x = 1$

Supposons $m < 0$

$$f(x) = -(x-1)^{2e^x}; f'(x) = -2(x-1)e^x - (x-1)^{2e^x} = e^x(1-x)(1+x)$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	0	$-4/e$	0	

On doit donc résoudre $f(x) = m$ avec $m < 0$

Par le CTVI il y a exactement 3 solutions si $-4/e < m < 0$

2 solutions si $m = -4/e$

1 solution si $m < -4/e$