DS n° 4 Terminales S 734 et 734 *30 / 01 / 2012*

Mathématiques spécialité

Exercice 1 ***(10 points)***

Partie A

1) Démontrer que pour tout n entier naturel , 4^n est congru à 1 modulo 3
2) Prouver que $4^{12} - 1$ est divisible par 13
3) Pour $1 \leq n \leq 4$, déterminer le reste de la division euclidienne de 4^n par 17 . En déduire que , pour tout entier k , le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17 .
4) Pour quels entiers naturels n , le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?
5) A l'aide des questions précédentes , déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{12} - 1$

Partie B

Soit p un nombre premier différent de 2.

Soit $n \geq 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1[p]$. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1[p]$ et r le reste de la division euclidienne de n par b .

a) Montrer que $4^r \equiv 1[p]$. En déduire que r = 0
b) Prouver l'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par p si et seulement si n est multiple de b .

Exercice 2 ***(10 points)***

1) Calculer $PGCD(4^5 - 1; 4^6 - 1)$

Soit u la suite numérique définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$

2) Calculer les termes u_2 , u_3 , u_4
3) a) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 4u_n + 1$

   b) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n est un entier naturel .

   c) En déduire pour tout entier naturel n , $PGCD(u_n; u_{n+1})$

4) Soit v la suite définie pour tout entier naturel n , par

$$v_n = u_n + \frac{1}{3}$$

a) Montrer que v est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme .
b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
c) Déterminer pour tout entier naturel n , $PGCD(4^{n+1} - 1; 4^n - 1)$

DEBORD