Corrigé DS n° 1 spé

Exercice 1 *12 points*

1) Initialisation : 5 – 8 + 3 = 0 donc c'est vrai pour M_0

Supposons que M_n soit sur D .

$$5x_{n+1} - y_{n+1} + 3 = 5\left(\frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1\right) - \left(\frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5\right) + 3 = 5x_n - y_n + 3 = 0$$

Donc le point M_{n+1} est aussi sur D ; *2 points*

2) Par ce qui précède , on peut écrire : *2 points*

$$y_n = 5x_n + 3 \text{ et donc } x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}(5x_n + 3) + 1 = 4x_n + 2$$

3) C'est vrai pour le rang n = 0 car 1 est un entier naturel . Supposons que x_n soit un entier naturel pour un n donné , alors $4x_n$ est toujours entier naturel et $4x_n + 2$ aussi donc x_{n+1} est aussi un entier naturel . Conclusion , tous les x_n sont des entiers naturels . *1 point*

4) *2 points :* Supposons x_n divisible par 3 , alors il existe k tel que $x_n = 3k$ et donc $y_n = 5x_n + 3 = 5(3k) + 3 = 3(5k + 1)$ ce qui donne 3 divise y_n

5) Supposons que 3 ne divise ni x_n ni y_n . Soit d un diviseur commun à x_n et à y_n .
Alors d divise $5x_n - y_n = -3$ donc d divise 3 . On a donc d = 1 ou d = 3 . Si d = 3 , alors 3 divise x_n et y_n . Contradiction . Donc d = 1 . *2 points*

6) La formule est vraie au rang n = 0 . Supposons que pour un n donné , on a :

$$x_n = \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$$

$$x_{n+1} = 4x_n + 2 = 4\left[\frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)\right] + 2 = \frac{1}{3} \times 4^{n+1} \times 5 - \frac{8}{3} + 2 = \frac{1}{3} \times 4^{n+1} \times 5 - \frac{2}{3}$$

$$\text{Donc : } x_{n+1} = \frac{1}{3}(4^{n+1} \times 5 - 2)$$

La formule est donc vraie pour tout n . *2 points*

7) Si $4^n \times 5 - 2$ n'est pas un multiple de 3 , lorsqu'on le divise par 3 , on n'obtient pas un entier et on contredit la question 3) . *1 point*

Exercice 2 *4 points*

1) On a : *2 points*

$$2^2 = 4 \equiv -1[5] \text{ donc } 2^4 \equiv 1[5] \text{ donc :}$$

$2^{4k} \equiv 1[5]$, $2^{4k+1} \equiv 2[5]$, $2^{4k+2} \equiv 4[5]$ *et* $2^{4k+3} \equiv 3[5]$

2) $352 \equiv 2[5]$ *donc* $352^{14\,546} \equiv 2^{4(3636)+2} \equiv 4[5]$ *2 points*

Exercice 3 *4 points*

1) *2 points* . On a : $(n+2)^2 = n^2 + 2n + 4 = n(n+2) + 4$

Donc si 4 < n , alors le reste est 4 , sinon : $(n+2)^2 = n^2 + 2n + 4 = n(n+3) + 4 - n$

Et donc si 2 < n ≤ 4 , alors le reste est 4 – n . Pour n = 0 , la division est impossible .

Si n = 1 , 9 divisé par 1 a pour reste 0 . Si n = 2 : 16 divisé par 2 a pour reste 0

2) *2 points* . On a : $(n+2)^2 = n^2 + 2n + 4 = (n+4)(n-2) + 12$

Si 12 < n + 4 c'est-à-dire , si n > 8 , alors le reste est 12 .

Sinon , $(n+2)^2 = n^2 + 2n + 4 = (n+4)(n-1) - n + 8$

Si 8 – n < n + 4 c'est-à-dire si 2 < n ≤ 8 , alors le reste est 8 – n

Si n = 1 : 9 divisé par 5 a pour reste 4 .

Si n = 0 : 4 divisé par 4 a pour reste 0 .