Fiche 4 : Retour sur les équations et les inéquations

Ce qu'il faut revoir

Les équations des mini-stages ; les tableaux de signes ; les équations en général

Exercices pour se remettre en route

Exercice 1

Compléter puis factoriser f(x)

1) $f(x) = x^2 - 8x + 7 = (x - \cdots)^2 - \cdots$
2) $f(x) = x^2 + 12x - 4 = (x + \cdots)^2 - \cdots$
3) $f(x) = 3x^2 + 12x - 18 = 3(x + \cdots)^2 - \cdots$
4) $f(x) = 5x^2 + 15x - 7 = \cdots(\ldots + \cdots)^2 - \cdots$

Exercice 2

En s'inspirant de l'exercice 1 , résoudre :

1) $x^2 - 3x - 4 = 0$
2) $x^2 - 2x + 12 = 0$
3) $x^2 - 5x - 12 = 0$
4) $3x^2 - 10x + 8 = 0$
5) $5x^2 - 20x + 10 = 0$

Exercice 3

En s'inspirant de l'exercice 1 , résoudre :

1) $-x^2 + 7x - 12 \leq 0$
2) $x^2 + 6x - 16 \leq 0$
3) $2x^2 - 6x + 4 \geq 0$
4) $3x^2 - 6x - 24 \geq 0$
5) $x^2 - 4x + 3 \geq 0$

Des exercices plus difficiles

Exercice 4

Nous allons résoudre des équations du troisième degré . Le principe , on commence par trouver une racine évidente a puis on factorise par x – a en utilisant des identifications .

Exemple :

On veut résoudre $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

On remarque que si on remplace x par 1 on obtient : 1 – 1 + 1 – 1 = 0 . On dit alors que 1 est racine évidente .

On va donc chercher a , b et c tels que $x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$

On a alors :

$x^3 - x^2 + x - 1 = ax^3 + bx^2 - ax^2 + cx - bx - c = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$

Pour que l'égalité soit vraie , il faut que les nombres devant les mêmes puissances de x soient égaux :

Devant x^3 : d'un côté 1 , de l'autre a donc a = 1

Devant x^2 : d'un côté – 1 de l'autre b – a donc b – a = - 1 et b = a – 1 = 0

Devant x : d'un côté 1 , de l'autre c – b donc c – b = 1 et c = 1 + b = 1

On a donc : $x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$

On doit donc résoudre $(x - 1)(x^2 + 1) = 0$ c'est-à-dire x = 1 car $x^2 + 1$ jamais nul .

A vous de jouer

1) Résoudre $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ en remarquant que 1 est racine évidente puis en s'inspirant de l'exercice 1
2) Résoudre $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0$ en remarquant que 2 est racine évidente
3) Résoudre $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ en remarquant que – 1 est racine évidente puis en s'inspirant de l'exercice 1

Exercice 5

Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1) Il existe un réel x tel que $x^3 - 2x + 1 = (x-1)^2$
2) L'expression (2x+4)(x-5)² - 1 est factorisée
3) La forme factorisée de $(x-1)^2 + (2+3x)(1-x)$ est $(x-1)(-2x-3)$
4) L'équation x² = 4x a pour unique solution x = 4
5) 3 et – 3 sont solutions de l'équation $x^2 + 2x - 5 = 2x + 4$
6) Pour l'équation $x^3 - x^2 - 6x - 4 = 0$, les solutions sont $-1\,, 1+\sqrt{5}\ et\ 1-\sqrt{5}$
7) L'équation $\frac{2x+7}{x-4}$ = 0 a pour solutions 4 et – 3,5 .

Exercice 6

Trouver x et y tels que x² - y² = 77 et x – y = 11

Exercice 7

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{4}{x+2} - 1$$

1) Donner le domaine de définition de f
2) Calculer :

$$f(0)\,, f\left(\frac{1}{2}\right)\ et\ f\left(-2+\sqrt{2}\right)$$

3) Montrer que pour tout x du domaine de définition de f , on a :

$$f(x) = \frac{2-x}{x+2}$$

4) Résoudre $f(x) \leq 0$; $f(x) = 0\ et\ f(x) = 3$

Exercice 8

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = -2 + \frac{7}{-x+2}$$

1) Déterminer le domaine de définition de f .
2) Calculer :

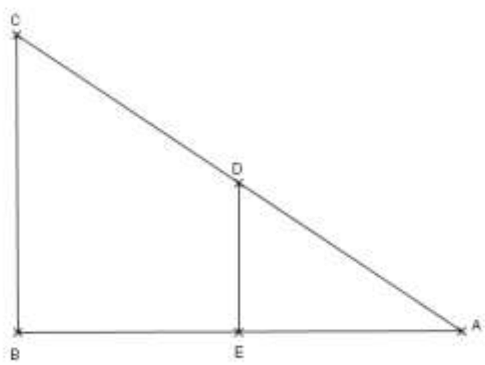
$$f(0)\,, f\left(-\frac{2}{3}\right)\ et\ f(2-\sqrt{5})$$

3) Montrer que :

$$f(x) = \frac{2x+3}{-x+2}$$

4) Résoudre : f(x) > 0 ; f(x) > - 2 .

Exercice 9



On partage un pré triangulaire selon le schéma suivant :

On a : (DE) parallèle à (AC) et AB = 200 m , BC = 150 m . On pose DE = x

1) Exprimer l'aire de ADE et celle de BCDE en fonction de x .
2) Déterminer la valeur de x pour laquelle ce pré est partagé en deux parcelles de même aire .

Un problème pour finir

Exercice 10

On veut construire un nouveau type de téléphone portable de forme rectangulaire . L'écran doit être un rectangle d'aire 16 cm^2 situé à 0,5 cm des bords gauche , droit et haut et à 5,5 cm du bas du téléphone .

1) On note x la largeur du téléphone et y sa hauteur . Ecrire les formules qui traduisent les contraintes de l'énoncé
2) Exprimer y en fonction de x
3) On veut de plus que $x + y = 15$. En déduire une équation vérifiée par x .
4) Conjecturer les solutions de cette équation en utilisant le graphe de votre calculatrice
5) Démontrer votre conjecture en résolvant votre équation par le calcul