Corrigé 9

Exercice 1

$f(x) = (x+5)^2 - 4(x+5) + 4 = x^2 + 6x + 9$ *forme développée* 2

$f(x) = (x+3)^2$ *forme factorisée* 3

$f(-5) = 4$ (*forme* 1)

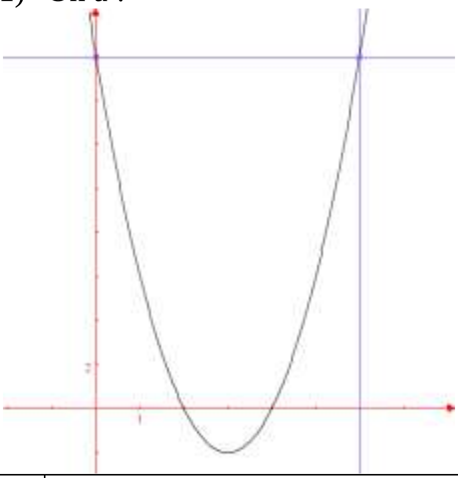
Puisque f(x) = $(x + 3)^2$, alors f est toujours positive et donc f(x) > 0 a pour solution $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f(x)	↘	0	↗

Avec la forme 2 : f(x) = 9 équivaut à $x^2 + 6x = 0$ soit x(x + 6) = 0 et les solutions sont x = 0 ou x = - 6

Exercice 2

1) On a :



2) $f(x) = 2x^2 - 12x + 16 = 2(x^2 - 6x + 8) = 2[(x-3)^2 - 1] = 2(x-4)(x-2)$
3) Par lecture graphique f(x) = 0 a pour solutions x = 2 ou x = 4 et f(x) = 16 a pour solutions x = 0 ou x = 6
4) Par calcul :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-4)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \; ou \; x = 2$$

$$f(x) = 16 \Leftrightarrow 2x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = 6$$

5) On a $f(x) = 2[(x-3)^2 - 1] = 2(x-3)^2 - 2$ donc :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f(x)	↘	-2	↗

Exercice 3

1) f est strictement croissante sur $]2;+\infty[$: faux
2) f n'est pas strictement croissante sur $]2;+\infty[$: vrai
3) f est strictement décroissante sur $]2;+\infty[$: vrai
4) f n'est pas strictement décroissante sur $]2;+\infty[$: faux

Exercice 4

1) Par Pythagore , on a : $AC^2 = x^2 + (5 - x)^2 = 2x^2 - 10x + 25$, on doit donc résoudre :

$$2x^2 - 10x + 25 - \frac{29}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + \frac{21}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(4x^2 - 20x + 21) \geq 0$$

$$\frac{4}{2}\left(x^2 - 5x + \frac{21}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 2\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - 1\right] \geq 0 \Leftrightarrow 2\left(x - \frac{7}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \geq 0$$

Et avec un tableau de signes , on obtient :

$$S = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2}; +\infty\right[$$

2) On a :

$$AC^2 = 2(x^2 - 5x + \frac{25}{2}) = 2\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}\right] = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}$$

Et par définition , le minimum de AC^2 et donc de AC est atteint en x =2,5 cm .

Exercice 5

Aire de la bordure égale à l'aire de la toile : 8x +2(3 – 2x)x = (3 -2x)(4 -2x)

Résolvons :

$$-4x^2 + 14x - 12 + 6x + 8x - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow -8x^2 + 28x - 12 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$2\left[\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} + \frac{3}{2}\right] = 0 \Leftrightarrow 2\left[\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right] = 2(x-3)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \; ou \; x = \frac{1}{2}$$

Corrigé 9

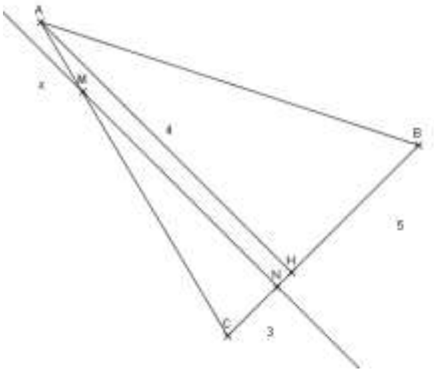
Exercice 6

Algébriquement :

$$-x^2+12x+4>31 \Leftrightarrow x^2-12x+27<0 \Leftrightarrow (x-6)^2-9<0 \Leftrightarrow (x-9)(x-3)<0$$

Par un tableau de signes : S =]3 ;9[

Exercice 7



1) Par Pythagore , AC² = 25 donc AC = 5 et donc CM = 5 – x
2) Par Thalès :

$$\frac{CM}{CA}=\frac{MN}{AH} \Leftrightarrow MN=\frac{4(5-x)}{5}$$

Par Pythagore :

$$CN^2=CM^2-MN^2=(5-x)^2-\frac{16}{25}(5-x)^2$$

$$=\frac{9}{25}(5-x)^2 \; donc \; CN=\frac{3}{5}(5-x)$$

3) On a CH = 3 donc :

$$NH=CH-CN=3-\frac{3}{5}(5-x) \; et \; donc$$

$$BN=5+NH=8-\frac{3}{5}(5-x)$$

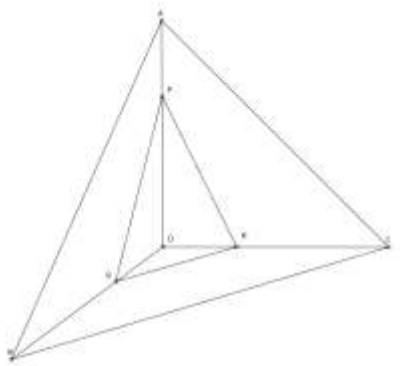
$$MB^2=BN^2+MN^2=\left(8-\frac{3}{5}(5-x)\right)^2+\frac{16(5-x)^2}{25}=64-\frac{48}{5}(5-x)+(5-x)^2$$

$$MB^2=x^2-\frac{2}{5}x+41=\left(x-\frac{1}{5}\right)^2-\frac{1}{25}+41=\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{1024}{25}$$

4) Par la forme canonique , MB² semble être minimale pour x = 1/5 .
5) Démontrons le :

$$f(x)-f\left(\frac{1}{5}\right)=\left(x-\frac{1}{5}\right)^2>0$$

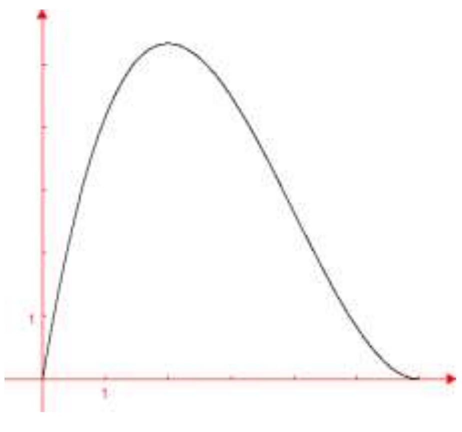
Exercice 8



1) On a puisque DQR est un triangle rectangle en D et (DP) hauteur de DPQR :

$$V(x)=\frac{x\times\frac{(6-x)^2}{2}}{3}=\frac{x(6-x)^2}{6}$$

2) Comme précédemment , on conjecture en utilisant la courbe :



Il semble que le maximum soit atteint pour x = 2

$$V(x)-V(2)=\frac{x(6-x)^2}{6}-\frac{32}{6}=\frac{36x-12x^2+x^3-32}{6}$$

$$=\frac{(x-2)(x^2+ax+b)}{6}$$

$36x-12x^2+x^3-32=x^3+(a-2)x^2+(b-2a)x-2b$

donc b = 16 et a = - 10

$$V(x)-V(2)=\frac{(x-2)(x^2-10x+16)}{6}=\frac{(x-2)[(x-5)^2-9]}{6}$$

$$=\frac{(x-2)^2(x-8)}{6}$$

Et donc puisque 0 < x < 6 , on a bien V(x) – V(2) < 0 .