Corrigé 8

Exercice 1

Soit A(x) l'aire de la croix et soit B(x) l'aire du rectangle privé de la croix .
A(x) = aire(EJKP) + aire(GHMN) – aire (ILOF) = 5x +4x – x² (car le carré ILOF est compté deux fois sinon) donc A(x) = 9x – x²
B(x) = 20 – 9x + x²
On veut A(x) = B(x) c'est-à-dire : 20 – 9x + x² = 9x – x² d'où : 20 – 18x + 2x² = 0 ou x² - 9x + 10 = 0
On résout :

$$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{81}{4}+10=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{41}{4}=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{9}{2}-\frac{\sqrt{41}}{2}\right)\left(x-\frac{9}{2}+\frac{\sqrt{41}}{2}\right)=0$$

$$x=\frac{9}{2}+\frac{\sqrt{41}}{2} \; ou \; x=\frac{9}{2}-\frac{\sqrt{41}}{2}$$

Exercice 2

Soit x le rayon de la planète à sacrifier ; le volume de la planète (sphère) doit être égal à la somme des volumes des deux verres :

$$\frac{1}{3}\pi\times 6000^2\times x+\frac{1}{3}\pi\times x^2\times 20000=\frac{4}{3}\pi x^3$$

$$36\times 10^6 x+20\times 10^3 x^2-4x^3=0$$

$$-4x(-9\times 10^6-5000x+x^2)=0$$

Le rayon n'
Le rayon n'est pas nul , on doit donc résoudre :

$$x^2-5000x-9\times 10^6=0 \Leftrightarrow (x-2500)^2-625\times 10^4-900\times 10^4=0$$

$$(x-2500)^2-1525\times 10^4=0 \Leftrightarrow (x-2500-500\sqrt{61})(x-2500+500\sqrt{61})=0$$

On a donc comme possibilité (car un rayon est positif) :
$x=2500+500\sqrt{61}$ km

Exercice 3

1) On a :

$$R(x)=20x-30x+\frac{x^2}{5}=\frac{x^2}{5}-10x=x\left(\frac{x}{5}-10\right)$$

2) On doit résoudre R(x) > 0 donc avec un tableau de signes : S = $]-\infty;0[\cup]50;+\infty[$. Le nombre de ceintures étant positif , le nombre minimal de ceintures à vendre pour faire un bénéfice est 50 .

Exercice 4

On pose AD = x .
Par Thalès :

$$\frac{x}{8}=\frac{12-AF}{12} \; donc \; 12-AF=\frac{3}{2}x \; et \; donc \; AF=12-\frac{3}{2}x$$

Déterminons maintenant l'aire de la fenêtre :

$$A(x)=12x-\frac{3}{2}x^2=-\frac{3}{2}(x^2-8x)=-\frac{3}{2}[(x-4)^2-16]=-\frac{3}{2}(x-4)^2+24$$

La question est de savoir quand cette aire est maximale ; par définition , le maximum est atteint quand x = 4 et vaut 24 m² .

Exercice 5

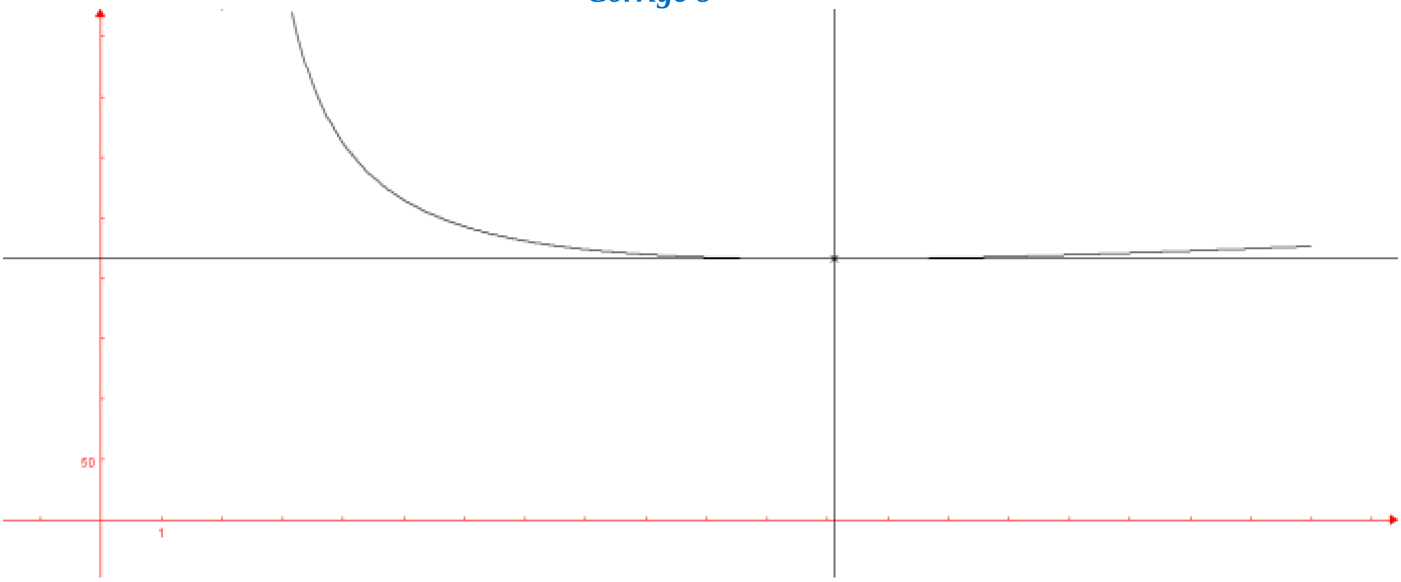
1) On a : aire (EFGH) = 150 et aire (EFGH) = (x – 2) (y – 3) donc

$$y-3=\frac{150}{x-2} \; donc \; y=\frac{150}{x-2}+3$$

$$f(x)=xy=\frac{150x}{x-2}+3x$$

2) On a :

Corrigé 8



Il semble que le minimum soit atteint en x = 12

Prouvons le :

Déterminons le signe de f(x) – f(12)

$$f(x) - f(12) = \frac{150x}{x-2} + 3x - 216 = \frac{150x + 3x^2 - 6x - 216x + 432}{x-2} = \frac{3x^2 - 72x + 432}{x-2}$$

$$= \frac{3(x^2 - 24x + 144)}{x-2} = \frac{3(x-12)^2}{x-2} > 0 \; si \; x \; > \; 2$$

Donc si x > 2 , f(x) > f(12) et le minimum de f est bien atteint pour x = 12 .

3) On doit résoudre :

$$f(x) < 224 \Leftrightarrow \frac{150x}{x-2} + 3x < 224 \Leftrightarrow \frac{150x + 3x^2 - 6x - 224x + 448}{x-2} < 0$$

$$\frac{3x^2 - 80x + 448}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{3\left[\left(x - \frac{40}{3}\right)^2 - \frac{1600}{9} + \frac{448}{3}\right]}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{3\left(x - \frac{40}{3} - \frac{16}{3}\right)\left(x - \frac{40}{3} + \frac{16}{3}\right)}{x-2} < 0$$

$$\frac{3\left(x - \frac{56}{3}\right)(x-8)}{x-2} < 0$$

Sachant que x > 2 (à cause des marges) avec un tableau de signes :

$$S = \left]8; \frac{56}{3}\right[$$