Corrigé 4

Exercice 1

1) $f(x) = x^2 - 8x + 7 = (x-4)^2 - 16 + 7 = (x-4)^2 - 9$
2) $f(x) = x^2 + 12x - 4 = (x+6)^2 - 36 - 4 = (x+6)^2 - 40$
3) $f(x) = 3x^2 + 12x - 18 = 3(x^2 + 4x - 6) = 3[(x+2)^2 - 4 - 6]$
$$= 3[(x+2)^2 - 10] = 3(x+2)^2 - 30$$
4) On a :
$$f(x) = 5x^2 + 15x - 7 = 5(x^2 + 3x) - 7 = 5\left[\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] - 7$$
$$= 5\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{45}{4} - 7 = 5\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{73}{4}$$

Exercice 2

1) On factorise :
$$x^2 - 3x - 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = \left(x - \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right)$$
$$= (x-4)(x+1)$$

Les solutions sont donc x = 4 ou x = - 1

2) De même :
$$x^2 - 2x + 12 = (x-1)^2 + 11 \; n'est\ jamais\ nul\ car\ un\ carré\ est\ toujours\ positif$$
Pas de solution

3) Idem :
$$x^2 - 5x - 12 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 12 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{73}{4}$$
$$= \left(x - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{73}}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{73}}{2}\right)$$
$$x^2 - 5x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{73}}{2} \; ou \; x = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{73}}{2}$$

4) Idem :
$$3x^2 - 10x + 8 = 3\left(x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{8}{3}\right) = 3\left[\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} + \frac{8}{3}\right] = 3\left[\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right]$$
$$= 3\left(x - \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\right) = 3(x-2)\left(x - \frac{4}{3}\right)$$
$$3x^2 - 10x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \; ou \; x = \frac{4}{3}$$

5) Idem
$$5x^2 - 20x + 10 = 5(x^2 - 4x + 2) = 5[(x-2)^2 - 2] = 5(x - 2 - \sqrt{2})(x - 2 + \sqrt{2})$$
$$5x^2 - 20x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{2} \; ou \; x = 2 - \sqrt{2}$$

Exercice 3

1) On a :
$$-x^2 + 7x - 12 = -(x^2 - 7x + 12) = -\left[\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 12\right] = -\left[\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]$$
$$= -(x-4)(x-3)$$

On fait un tableau de signes sans oublier le «-« devant et on obtient
S = $]-\infty; 3] \cup [4; +\infty[$

2) De même :

Corrigé 4

$$x^2+6x-16=(x+3)^2-25=(x-2)(x+8)$$

On fait un tableau de signes et on obtient : S = [-8 ;2]

3) Idem :

$$2x^2-6x+4=2(x^2-3x+2)=2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2\right]=2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]$$
$$=2(x-2)(x-1)$$

On fait un tableau de signes : S = $]-\infty;1]\cup[2;+\infty[$

4) Idem :

$$3x^2-6x-24=3(x^2-2x-8)=3[(x-1)^2-9]=3(x-4)(x+2)$$

On fait un tableau de signes : S = $]-\infty;-2]\cup[4;+\infty[$

5) Idem

$$x^2-4x+3=(x-2)^2-1=(x-3)(x-1)$$

On fait un tableau de signes et on obtient : S = $]-\infty;1]\cup[3;+\infty[$

Exercice 4

1) On a :

$$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2+ax+b)=x^3+(a-1)x^2+(b-a)x-b$$

Donc a – 1 = - 2 , b – a = - 5 et – b = 6 : on a b = - 6 , a = - 1

$$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x-6)=(x-1)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right]$$
$$=(x-1)(x-3)(x+2)$$

Les solutions sont donc x = 1 , x = 3 ou x = - 2

2) On a :

$$x^3-2x^2+3x-6=(x-2)(x^2+ax+b)=x^3+(a-2)x^2+(b-2a)x-2b$$

Donc : a – 2 = - 2 , b – 2a = 3 et – 2b = - 6 donc : b = 3 , a =0

$$x^3-2x^2+3x-6=(x-2)(x^2+3)$$

Il y a donc une seule solution x = 2 car x² + 3 n'est jamais nul .

3) On a

$$x^3+2x^2-x-2=(x+1)(x^2+ax+b)=x^3+(a+1)x^2+(a+b)x+b$$

Donc a + 1 = 2 , a + b = - 1 et b = - 2 ; donc b = - 2 et a = 1 .

$$x^3+2x^2-x-2=(x+1)(x^2+x-2)=(x+1)\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]$$
$$=(x+1)(x+2)(x-1)$$

Les solutions sont x = -1 , x = - 2 ou x = 1 .

Exercice 5

1) Il existe un réel x tel que $x^3-2x+1=(x-1)^2$: vrai , x = 0
2) L'expression (2x+4)(x-5)² - 1 est factorisée : faux
3) La forme factorisée de $(x-1)^2+(2+3x)(1-x)$ est $(x-1)(-2x-3)$: vrai
4) L'équation x² = 4x a pour unique solution x = 4 : faux , x = 0 aussi
5) 3 et – 3 sont solutions de l'équation $x^2+2x-5=2x+4$: vrai
6) Pour l'équation $x^3-x^2-6x-4=0$, les solutions sont -1 , $1+\sqrt{5}$ *et* $1-\sqrt{5}$: vrai
7) L'équation $\frac{2x+7}{x-4}=0$ a pour solutions 4 et – 3,5 : faux , 4 VI

Exercice 6

On cherche x et y tels que x² - y² = 77 c'est-à-dire : (x – y) (x + y) = 77 .
On sait que x – y = 11 donc x + y = 7 .
On ajoute ces deux égalités : 2x = 18 donc x = 9 et y = - 2 .

Exercice 7

Corrigé 4

$$f(x) = \frac{4}{x+2} - 1$$

1) La valeur interdite est – 2 donc Df = $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$
2) On a

$$f(0) = 1\,, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5}\ et\ f(-2+\sqrt{2}) = \frac{4}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{4\sqrt{2}}{2} - 1 = 2\sqrt{2} - 1$$

3) On a

$$f(x) = \frac{4}{x+2} - 1 = \frac{4-x-2}{x+2} = \frac{2-x}{x+2}$$

4) En utilisant cette dernière écriture

$$f(x) \leq 0\ \ tableau\ de\ signes:\ S =]-\infty; -2[\, \cup\, [2; +\infty[;$$

$$f(x) = 0\ :\ x = 2$$

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{4}{x+2} - 1 = 3 \Leftrightarrow \frac{4}{x+2} - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{-4-4x}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Exercice 8

1) Df = $\mathbb{R} \setminus \{2\}$
2) On a

$$f(0) = \frac{3}{2}\,, f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{8}\ et\ f(2-\sqrt{5}) = -2 + \frac{7}{\sqrt{5}} = -2 + \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

3) On a :

$$f(x) = -2 + \frac{7}{-x+2} = \frac{2x-4+7}{-x+2} = \frac{2x+3}{-x+2}$$

4) Avec un tableau de signes et la dernière expression S = $\left]-\frac{3}{2}; 2\right[$

Avec la première écriture :

$$\frac{7}{-x+2} > 0 \Leftrightarrow -x+2 > 0 \Leftrightarrow x < 2 \Leftrightarrow S =]-\infty; 2[$$

Exercice 9

1) On va utiliser Thalès pour déterminer AE en fonction de x :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} \Leftrightarrow \frac{AE}{200} = \frac{x}{150} \Leftrightarrow AE = \frac{4}{3}x$$

$$aire(ADE) = \frac{2}{3}x^2$$

Aire(ABC) = 15 000

$$aire(BCDE) = 15000 - \frac{2}{3}x^2$$

2) On doit résoudre

$$15000 - \frac{2}{3}x^2 = \frac{2}{3}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{45000}{4} = 11250 \Leftrightarrow x = \sqrt{11250} = 75\sqrt{2}$$

Car x est positif comme longueur .

Exercice 10

1) On doit avoir : (x – 1) (y – 6) = 16
2) On a donc :

$$y - 6 = \frac{16}{x-1}\ donc\ y = \frac{16}{x-1} + 6$$

3) Et 5) On a

$$x + \frac{16}{x-1} + 6 = 15 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 16 - 9x + 9}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 10x + 25}{x-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$