Corrigé 11

Exercice 1

1) On a :

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-70	-43	-22	-7	2	5	2	-7	-22	-43	-70	-103

2) On a : $f(x) = 5 - 3(x + 1)^2$
3) Soient x < y < - 1 alors

$$f(x) - f(y) = 3[(y+1)^2 - (x+1)^2] = 3(y-x)(y+x+2) < 0$$

Car y – x > 0 et y + x + 2 < 0

Donc par définition puisque x < y < -1 entraine f(x) < f(y) alors f est croissante sur $]-\infty; -1]$

Exercice 2

1) On doit résoudre :

$$\frac{2}{x+1} + 3 = 3{,}4 \Leftrightarrow \frac{2}{x+1} = 0{,}4 \Leftrightarrow x = \frac{2}{0{,}4} - 1 = 4$$

2) On a :

$$f(x) = \frac{2}{x+1} + 3$$

Exercice 3

1) Avec x = 2 on obtient : y vaut 1,2
2) On a :

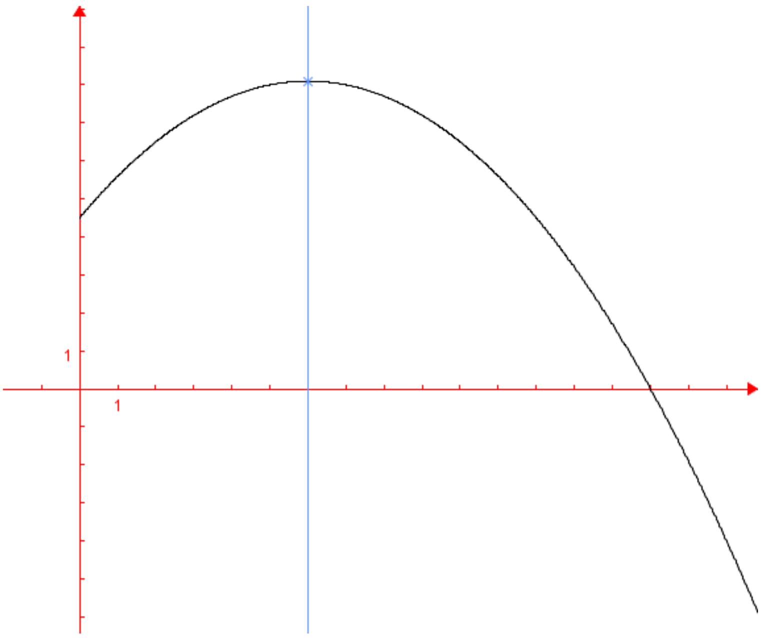
$$y = \frac{1}{3x-1} + 1$$

Supposons x augmente de a :

$$y = \frac{1}{3(x+a)-1} + 1$$

Or 3(x+a) – 1 > 3x – 1 donc y diminue .

Exercice 4



1) Ci-contre

2) On cherche f(0) = 4,5 m
3) Il semble que ce soit pour x = 6 et cette hauteur est environ égale à 8 m .
4) On met f sous forme canonique :

$$f(x) = -\frac{1}{10}x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{9}{2} = -\frac{1}{10}(x^2 - 12x - 45) = -\frac{1}{10}[(x-6)^2 - 81]$$
$$= -\frac{1}{10}(x-6)^2 + \frac{81}{10}$$

Corrigé 11

On a donc

$$f(x) - f(6) = -\frac{1}{10}(x-6)^2 < 0$$

Donc f(x) < f(6) et f admet bien un maximum en x = 6

5) Il touche la surface de l'eau quand h(x) = 0 ; on achève la factorisation :

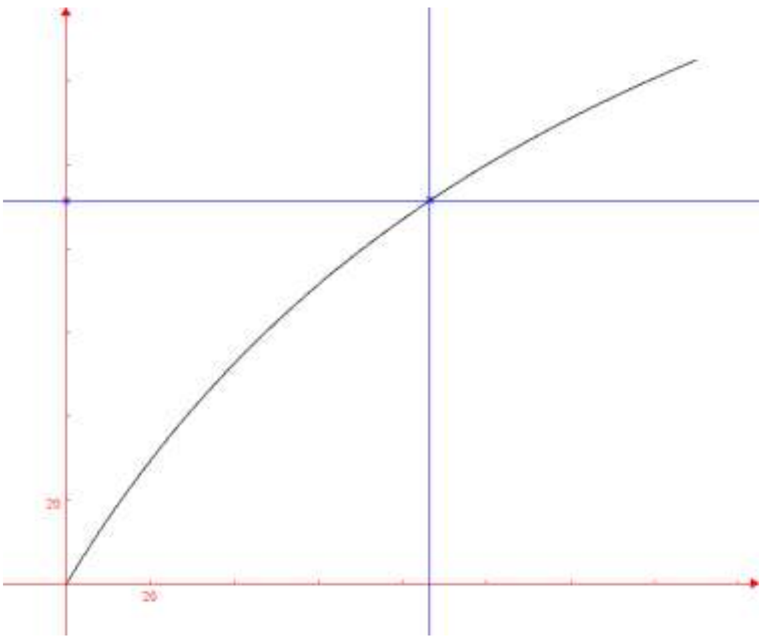
$$h(x) = -\frac{1}{10}[(x-6)^2 - 81] = -\frac{1}{10}(x-15)(x+3)$$

donc h(x) = 0 si x = 15 (car x positif) donc l'hameçon touche la surface de l'eau à 15 m.

Exercice 5

1) On a une durée de 2 h sur la première partie du trajet puis sur les 300 derniers kilomètres , on a une durée de 300/x
2) On a une durée totale de 2 + 300/x et une distance totale de 500 km donc :

$$v(x) = \frac{500}{2 + \frac{300}{x}} = \frac{500x}{2x + 300}$$



3) On a
4) Il semble que ce soit pour x = 85 km/h environ
5) On résout :

$$\frac{500x}{2x+300} = 90$$
$$\Leftrightarrow 500x - 180x = 27000$$
$$\Leftrightarrow 320x = 27000$$
$$\Leftrightarrow x = 84{,}375 km/h$$

Exercice 6

1) On a f(x) = 1,2 x et g(x) = 10 + 0,8 x . On doit donc résoudre f(x) < g(x) c'est-à-dire : 1,2 x < 10 + 0,8 x ce qui donne : 0,4 x < 10 donc x < 25 . Conclusion : , si on fait moins de 25 kilomètres , il faut choisir la compagnie A et sinon , il faut choisir la compagnie B .
2) On pose h(x) = ax + b , on doit donc résoudre :

$$\begin{cases} 17a + b = 23 \\ 35a + b = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17a + b = 23 \\ 18a = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 6 \end{cases}$$
$$h(x) = x + 6$$

La compagnie fait payer une prise en charge de 6 € et fait payer 1 € par kilomètre .

3) On doit résoudre f(x) < h(x) et g(x) < h(x) : 1,2 x < x + 6 donne x < 30 et 10 + 0,8 x < x + 6 donne x > 20 . Conclusion : on choisit A si on fait moins de 25 km , B si on fait plus de 25 ; la compagnie C n'est pas avantageuse .

Exercice 7

1) Les deux nénuphars étant posés sur la surface plane de l'eau , il faut résoudre f(x) = 0

$$-3{,}72x^2 + 1{,}43x = 0 \Leftrightarrow x(-3{,}72x + 1{,}43) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = \frac{143}{372}$$

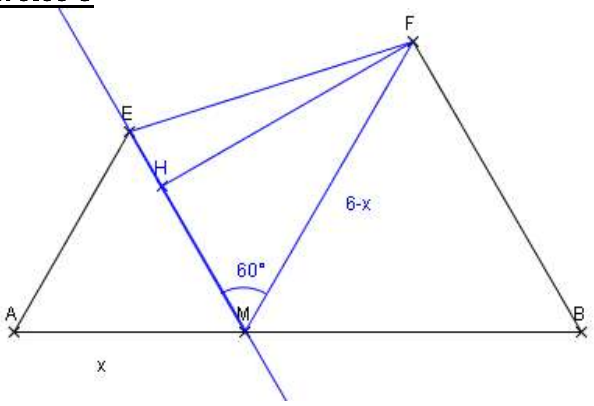
Le premier nénuphar est don à 0 , le second à environ 0,38 m : il y a donc une distance de 38 cm entre les deux .

2) C'est la valeur maximale de f ; écrivons la sous forme canonique :

$$f(x) = -3{,}72x^2 + 1{,}43x = -3{,}72\left(x^2 - \frac{143}{372}x\right) = -3{,}72\left[\left(x - \frac{143}{744}\right)^2 - \frac{20449}{553536}\right]$$

Le maximum est donc atteint pour environ x = 0,19 m et la grenouille est alors à environ 13 cm au dessus du sol .

Exercice 8



Soit f la fonction égale à l'aire de EFM :

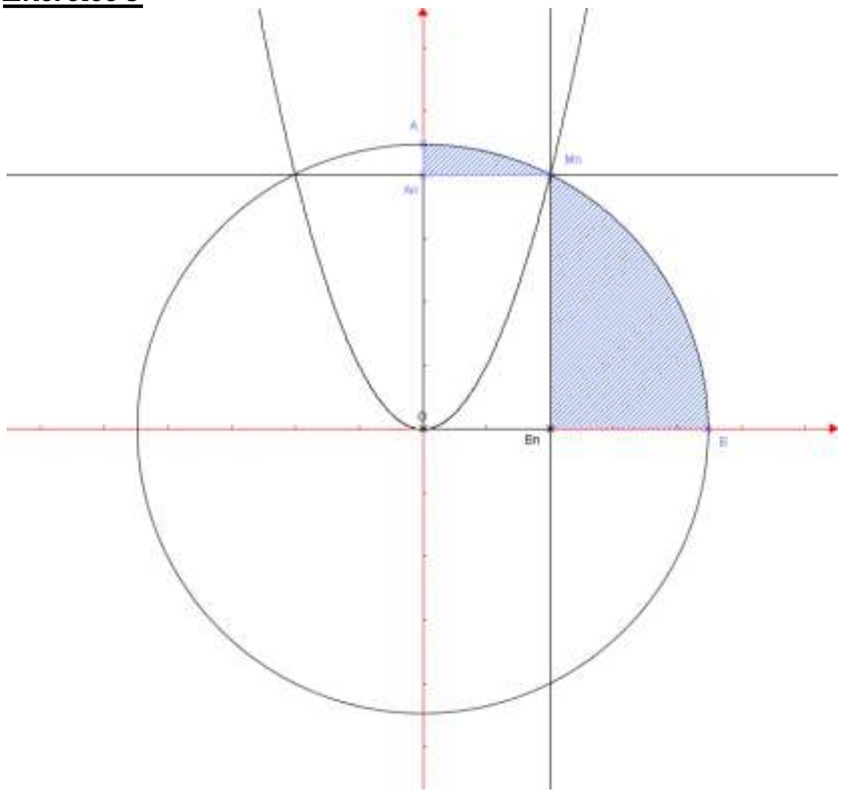
Soit H le projeté orthogonal de F sur [EM] ; puisque A , M et B alignés et AEM et MBF équilatéraux , alors $\widehat{EMF} = 60°$. On a donc :

$$sin60 = \frac{HF}{6-x} \Leftrightarrow HF = \frac{\sqrt{3}}{2}(6-x)$$

$$f(x) = \frac{HF \times EM}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(6x - x^2) = -\frac{\sqrt{3}}{4}[(x-3)^2 - 9]$$

L'aire de EFM est donc maximale pour x = 3 .

Exercice 9



Corrigé 11

Soient f la fonction égale à l'aire du rectangle et g la fonction égale à l'aire de Sn (hachurée en bleu sur le dessin) . On note Mn(n ;n²)

$$f(n) = n \times n^2 = n^3$$

$$g(n) = \frac{\pi}{4} \times OM_n{}^2 - f(n) = \frac{\pi}{4} \times (n^2 + n^4) - n^3$$

On doit donc résoudre :

$$g(n) > f(n) \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \times (n^2 + n^4) - n^3 > n^3 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} n^2 \left(1 + 1n^2 - \frac{8}{\pi} n\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} n^2 \left[\left(n - \frac{4}{\pi}\right)^2 - \frac{16}{\pi^2} + 1\right] > 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} n^2 \left[\left(n - \frac{4}{\pi}\right)^2 - \frac{16 - \pi^2}{\pi^2}\right] > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} n^2 \left(n - \frac{4}{\pi} - \sqrt{\frac{16 - \pi^2}{\pi^2}}\right)\left(n - \frac{4}{\pi} + \sqrt{\frac{16 - \pi^2}{\pi^2}}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} n^2 \left(n - \frac{4 + \sqrt{16 - \pi^2}}{\pi}\right)\left(n - \frac{4 - \sqrt{16 - \pi^2}}{\pi}\right) > 0$$

A l'aide d'un tableau de signes , on obtient :

$$S = \left]-\infty ; \frac{4 - \sqrt{16 - \pi^2}}{\pi}\right[\cup \left]\frac{4 + \sqrt{16 - \pi^2}}{\pi} ; +\infty\right[$$

Et comme on cherche des entiers naturels qui vérifient cette propriété , on doit choisir n supérieur ou égal à 3 .

Exercice 10

On a :

$$f_n(x) = \frac{1}{2^n} x \ donc \ A_n \left(1 ; \frac{1}{2^n}\right) \ donc \ IA_n = \frac{1}{2^n}$$

On doit donc résoudre :

$$\frac{1}{2^n} \leq 10^{-5}$$

On entre dans la calculatrice la fonction : $\frac{1}{2^x}$ et on regarde le tableau de valeurs : c'est à partir de n = 17 .

Remarque : vous apprendrez à résoudre rigoureusement cette inéquation en terminale !
Encore un peu de patience !