Corrigé 10

Exercice 1

1) ABCD est un parallélogramme si et seulement si :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = 5 - x \\ 1 = 9 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow D(10; 8)$$

2) On a :

$$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = 2(-5) + 2(5) \\ y - 7 = 2(1) + 2(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow E(5; 11)$$

3) On a : $\overrightarrow{AE}(0; 4)\ et\ \overrightarrow{AC}(0; 2)\ donc\ \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}$; les vecteurs sont colinéaires et donc les points A , e et C sont alignés .
4) Les points A et C ont la même abscisse donc (AC) : x = 5
5) On a d droite verticale puisque parallèle à (AC) donc d : x = 0
6) Commençons par déterminer une équation de (DE) : M(x ;y) appartient à (DE) si et seulement si $\overrightarrow{DM}(x - 10; y - 8)\ et\ \overrightarrow{DE}(-5; 3)$ colinéaires : $3(x - 10) + 5(y - 8) = 0 \Leftrightarrow 3x + 5y - 70 = 0$

On doit donc résoudre : x = 0 et 3x + 5y – 70 = 0 d'où y = 14 et x = 0 .

Exercice 2

1) Le coefficient de d' est égal à -1/2
2) On a :

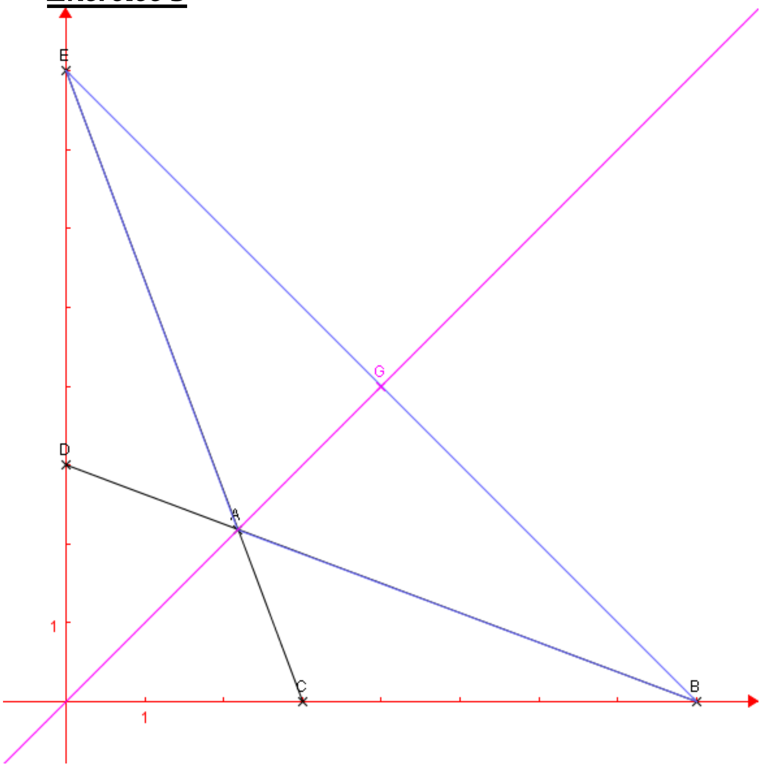
$$y = -\frac{1}{2}x + p\ et\ A\ est\ sur\ d'\ donc\ p = 7\ ;\ d' : y = -\frac{1}{2}x + 7$$

3) Commençons par déterminer le coefficient directeur de (BC) et notons D' la droite cherchée

$$m = \frac{3 - 7}{4 - 5} = 4\ donc\ D' : y = -\frac{1}{4}x + p\ ;\ 9 = \frac{1}{2} + p\ donc\ p = \frac{17}{2}$$

$$D' : y = -\frac{1}{4}x + \frac{17}{2}$$

Exercice 3



On a besoin des coordonnées de A et donc pour cela des équations de (BD) et (CE) :
Par lecture graphique :

$$(BD) :\ y = -\frac{3}{8}x + 3\ ;\ (CE) : y = -\frac{8}{3}x + 8$$

On détermine les coordonnées de A :

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{8}x + 3 \\ y = -\frac{8}{3}x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{55}{24}x - 5 \\ y = -\frac{8}{3}x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{24}{11} \\ y = \frac{24}{11} \end{cases} \Leftrightarrow A\left(\frac{24}{11}; \frac{24}{11}\right)$$

Corrigé 10

La droite (EB) a pour équation y = - x + 8 donc une perpendiculaire à (BE) passant par A a pour équation :

$$y = x$$

C'est donc l'équation de (AG) et les coordonnées de G sont : G(4 ;4)

Pour calculer l'aire de ABE , il faut maintenant les longueurs AG et BE :

$$AG = \sqrt{\left(4-\frac{24}{11}\right)^2 + \left(4-\frac{24}{11}\right)^2} = \frac{\sqrt{800}}{11} = \frac{20\sqrt{2}}{11}\ ;\ BE = 8\sqrt{2}$$

$$aire(ABE) = \frac{\frac{20\sqrt{2}}{11} \times 8\sqrt{2}}{2} = \frac{160}{11}$$

Exercice 4

Puisque le cercle est tangent aux côtés du triangle alors (DF) perpendiculaire à (CB) et (DE) perpendiculaire à (AB) . De plus , DF = DE = r donc EDFB carré . On applique Thalès :

$$\frac{CF}{CB} = \frac{FD}{AB}\ donc\ \frac{a-r}{a} = \frac{r}{b}\ donc\ (a-r)b = ar \Leftrightarrow ab = ar + br \Leftrightarrow ab = r(a+b) \Leftrightarrow r = \frac{ab}{a+b}$$

Si a = 6 et b = 3 on a alors r = 2 .

Exercice 5

1) Pour que le point K appartienne à la droite (AB) il suffit que $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{AB}$
2) Pour que le point K appartienne au segment [AB] il faut que $\overrightarrow{AK}\ et\ \overrightarrow{AB}$ soient colinéaires
3) Pour que le point K soit milieu de [AB] il faut et il suffit que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AK}$
4) Pour que (AB) et (CD) soient parallèles il suffit que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
5) Pour que ABCD soit un parallélogramme il faut que $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{CD}$ soient colinéaires .

Exercice 6

1) La médiatrice de [AB] est la perpendiculaire à (AB) passant par C' . On détermine donc le coefficient directeur de (AB) puis on applique l'exercice 2

On note d1 la médiatrice de [AB] , d2 la médiatrice de [AC] et d3 la médiatrice de [BC] .

$$A'\left(3;\frac{19}{2}\right)\ ;\ B'\left(\frac{1}{2};6\right)\ et\ C'\left(\frac{11}{2};\frac{11}{2}\right)$$

$$m = \frac{7}{5}\ donc\ d1 : y = -\frac{5}{7}x + p;\ C'\ sur\ d1 : y = -\frac{5}{7}x + \frac{66}{7}$$

$$m = -\frac{8}{5}\ donc\ d2 :\ y = \frac{5}{8}x + p;\ avec\ B' :\ d2 : y = \frac{5}{8}x + \frac{91}{16}$$

$$m = -\frac{1}{10}\ donc\ d3 : y = 10x + p\ ;\ avec\ A' :\ d3 : y = 10x - \frac{41}{2}$$

2) On procède de même mais plus vite car la hauteur est parallèle à la médiatrice . On note d'1 , d'2 , d'3 les hauteurs respectives issues de C , B et A .

$$d'1 : y = -\frac{5}{7}x + p;\ avec\ C;\ d'1 : y = -\frac{5}{7}x + \frac{60}{7}$$

$$d'2 :\ y = \frac{5}{8}x + p;\ avec\ B :\ d'2 : y = \frac{5}{8}x + 4$$

$$d'3 : y = 10x + p\ ;\ avec\ A :\ d3 : y = 10x - 28$$

3) On détermine le centre du cercle circonscrit en cherchant l'intersection de deux médiatrices :

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{7}x + \frac{66}{7} \\ y = \frac{5}{8}x + \frac{91}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{75}{56}x - \frac{419}{112} \\ y = \frac{5}{8}x + \frac{91}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{419}{150} \\ y = \frac{223}{30} \end{cases}$$

On détermine l'orthocentre en cherchant l'intersection de deux hauteurs :

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{7}x + \frac{60}{7} \\ y = \frac{5}{8}x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{75}{56}x - \frac{32}{7} \\ y = \frac{5}{8}x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{256}{75} \\ y = \frac{92}{15} \end{cases}$$

Exercice 7

Corrigé 10

1) On doit résoudre :

$$\begin{cases} c = 200 \\ 2500a + 50b + c = 240 \\ 5625a + 75b + c = 245 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 200 \\ 2500a + 50b = 40 \\ 5625a + 75b = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 200 \\ 250a + 5b = 4 \\ 1125a + 15b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 200 \\ 375a = -3 \\ 250a + 5b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 200 \\ a = -\frac{1}{125} \\ b = \frac{6}{5} \end{cases}$$

$$h(x) = -\frac{1}{125}x^2 + \frac{6}{5}x + 200$$

2) On met h(x) sous forme canonique :

$$h(x) = -\frac{1}{125}(x^2 - 150x - 25000) = -\frac{1}{125}[(x-75)^2 - 30625] = -\frac{1}{125}(x-75)^2 + 245$$

La hauteur maximale est donc atteinte quand x = 75 et vaut 245 m

3) Le point de contact avec la vallée est atteint quand h(x) = 0

$$= -\frac{1}{125}[(x-75)^2 - 30625] = -\frac{1}{125}(x-250)(x+100)$$

Donc h(x) = 0 si x = 250 . Donc A(250 ;0) et B(0 ;200) donc

$$(AB): y = -\frac{4}{5}x + 200$$

4) On a O(0 ;0) et donc (OC) : y = 0
5) On a y = 0 et x = 250 .