A retenir

$\forall x \geq 1 : x \leq x^2 \leq x^3$
$\forall x \in [0;1] : x^3 \leq x^2 \leq x$

Le principe

On va démontrer deux inégalités à la place d'un encadrement .

Logique

Pour montrer que $A \leq B$, on peut montrer que $A - B \leq 0$

La démonstration

Première inégalité

On va montrer que $\forall x \geq 1 : x \leq x^2$ et $\forall x \in [0;1] : x^2 \leq x$
Posons $f(x) = x^2 - x$, nous allons étudier le signe de f .
$f(x) = x(x-1)$. Dressons un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		-	0	$+$		$+$	
$x-1$		-		-	0	$+$	
f(x)		$+$	0	-	0	$+$	

On obtient en lisant le tableau , $f(x) \geq 0$ sur $]-\infty;0] \cup [1;+\infty[$ et $f(x) \leq 0$ sur $[0;1]$ Ce qui donne bien $\forall x \geq 1 : x \leq x^2$ et $\forall x \in [0;1] : x^2 \leq x$

Deuxième étape

On va montrer que $\forall x \geq 1 : x^2 \leq x^3$ et $\forall x \in [0;1] : x^3 \leq x^2$
Posons $f(x) = x^3 - x^2$, nous allons étudier le signe de f .
$f(x) = x^2(x-1)$. Dressons un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$x-1$		-		-	0	$+$	
f(x)		-	0	-	0	$+$	

On obtient en lisant le tableau , $f(x) \geq 0$ sur $[1;+\infty[$ et $f(x) \leq 0$ sur $]-\infty;1]$ Ce qui donne bien $\forall x \geq 1 : x^2 \leq x^3$ et $\forall x \in [0;1] : x^3 \leq x^2$