1 Variations de la fonction carré

A retenir

La fonction $f(x) = x^2$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et est croissante sur $[0; +\infty[$.

Le principe

On va utiliser les définitions . On travaille sur les deux intervalles séparément .

La démonstration

Sur $]-\infty; 0]$

Soient a et b tels que $a < b < 0$. Etudions le signe de $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$a < b < 0 \iff a - b < 0$; de plus , puisque a et b sont négatifs , $a + b < 0$. Donc $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) > 0$
Par définition , la fonction carré est donc décroissante sur $]-\infty; 0]$

Sur $[0; +\infty[$

Soient a et b tels que $0 < a < b$. Etudions le signe de $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$0 < a < b \iff a - b < 0$; de plus , puisque a et b sont positifs , $a + b > 0$. Donc $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) < 0$
Par définition , la fonction carré est donc croissante sur $[0; +\infty[$

2 Variations de la fonction inverse

A retenir

La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

Le principe

On utilise toujours la définition et on travaille de nouveau sur deux intervalles

La démonstration

Sur $]-\infty; 0[$

Soient a et b tels que $a < b < 0$. Etudions le signe de $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{ab}$
$a < b < 0 \iff b - a > 0$; de plus , puisque a et b sont négatifs , $ab > 0$. Donc $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{ab} > 0$
Par définition , la fonction inverse est donc décroissante sur $]-\infty; 0[$

Sur $]0;+\infty[$

Soient a et b tels que $0 < a < b$. Etudions le signe de $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{ab}$

$0 < a < b \iff b - a > 0$; de plus , puisque a et b sont positifs , $ab > 0$. Donc $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{ab} > 0$

Par définition , la fonction inverse est donc décroissante sur $]0;+\infty[$

3 Variations de la fonction inverse

A retenir

La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est croissante sur $[0;+\infty[$

Le principe

On utilise toujours la définition

La démonstration

Soient a et b tels que $0 < a < b$. Etudions le signe de $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{(\sqrt{a} - \sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b}))}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

$a < b \iff a - b < 0$; de plus une racine est toujours positive donc le dénominateur est positif et donc $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{(\sqrt{a} - \sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b}))}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} < 0$

Par définition , la fonction racine est donc croissante sur $[0;+\infty[$