1 Les entiers

A retenir

Soit a un entier . La somme de deux multiples de a est aussi un multiple de a .

Le principe

On utilise la définition de "multiple"

La démonstration

Soit a un entier .
Soit b un multiple de a . Alors , par définition , il existe k entier tel que $b = ak$
Soit c un multiple de a . Alors , par définition , il existe k' entier tel que $c = ak'$
On a donc : $b + c = ak + ak' = a(k + k')$
Puisque k et k' sont des entiers , $k + k'$ est un entier et donc par définition , $b + c$ est un multiple de a .

A retenir

Le carré d'un nombre pair est pair . Le carré d'un nombre impair est impair .

Le principe

On utilise la définition de "nombre pair " et de "nombre impair"

La démonstration

Soit n un nombre pair . Alors , il existe un entier k tel que $n = 2k$. Alors $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$ qui est bien un multiple de 2 puisque k^2 est un entier .

Soit n un nombre impair . Alors , il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. Alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$.

$K = 2k^2 + 2k$ est un entier donc $n^2 = 2K + 1$ est un nombre impair .

Logique

Soit une phrase mathématique de la forme , si A alors B . On appelle contraposée d'une telle phrase , la proposition si non B alors non A . Quand une phrase est vraie , sa contraposée est également vraie .

La propriété précédente devient donc par contraposée :

Si le carré d'un nombre est impair alors ce nombre est impair . Si le carré d'un nombre est pair alors ce nombre est pair .

2 Les décimaux , rationnels et réels

A retenir

$\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal

Le principe

On utilise le raisonnement par l'absurde .

Logique

Qu'est-ce qu'un raisonnement par l'absurde ? On suppose que le contraire de l'énoncé est vrai . On déduit ainsi des propriétés qui aboutissent à une contradiction . L'hypothèse de départ est donc erronée .

La démonstration

Supposons que $\frac{1}{3}$ est un décimal .

Alors , il existe a et n entiers tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$.

On a donc : $3a = 10^n$ et par définition des diviseurs , 3 divise 10 . Ce qui est faux .

Notre hypothèse est donc fausse et on peut conclure que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal .

A retenir

$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

Le principe

On utilise le raisonnement par l'absurde .

La démonstration

On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel .

Alors il existe a et b entiers premiers entre eux tels que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ donc $a = b\sqrt{2}$.

On élève au carré : $a^2 = 2b^2$ (égalité 1)

Par définition , a^2 est donc pair et donc a est également pair .

On peut donc dire qu'il existe k entier tel que $a = 2k$.

On remplace dans l'égalité 1 , on obtient donc : $4k^2 = 2b^2$ donc $2k^2 = b^2$ donc b^2 est pair et b est pair.

On arrive donc à la conclusion que a et b sont pairs et donc non premiers entre eux . Contradiction .

Notre hypothèse de départ est donc fausse et on peut en déduire que $\sqrt{2}$ est irrationnel .