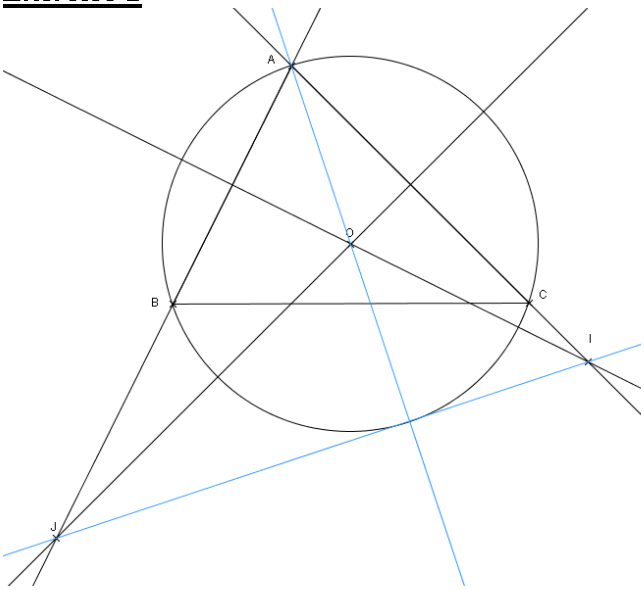
Corrigé géométrie collège

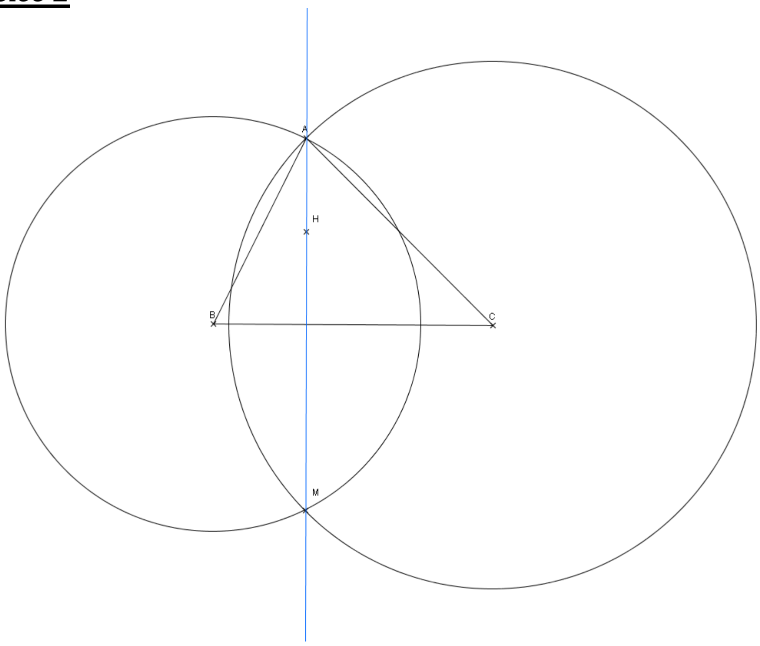
Exercices sur les particularités des triangles

Exercice 1



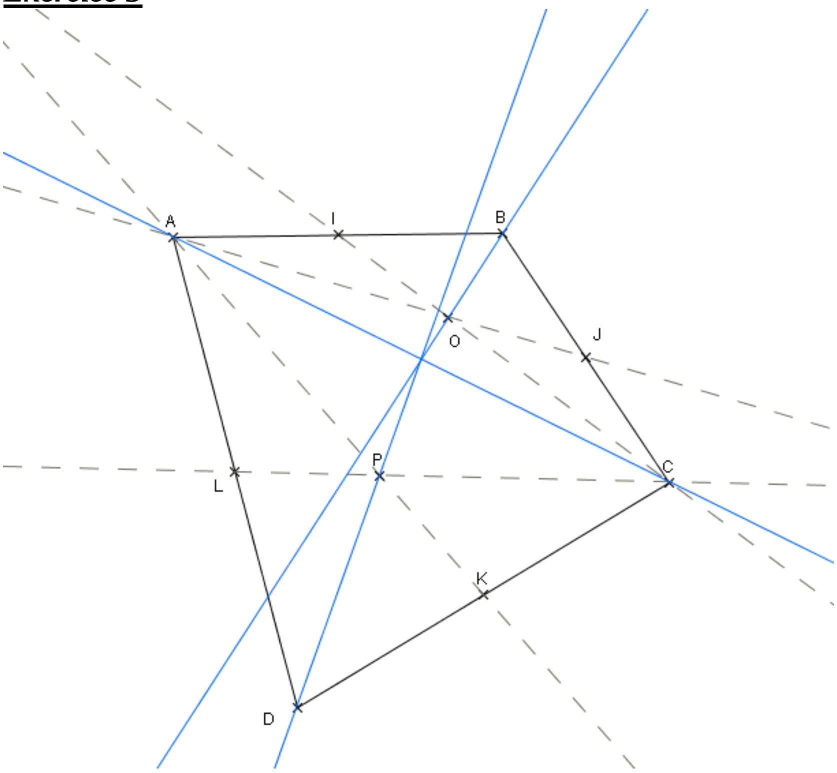
Puisque J est sur la médiatrice de [AC] et que O est le point de rencontre des médiatrices du triangle ABC , alors (OJ) est la médiatrice de [AC] et (OJ) perpendiculaire à (AI) car I est sur (AC) .
De même , on peut dire que (OI) est perpendiculaire à (AJ) .
Dans le triangle , AIJ , on peut donc dire que (OI) et (OJ) sont des hauteurs puisqu'elles passent par un sommet et sont perpendiculaires au côté opposé .
O est donc l'orthocentre de AIJ et (AO) est la troisième hauteur : elle est donc perpendiculaire à (IJ) .

Exercice 2



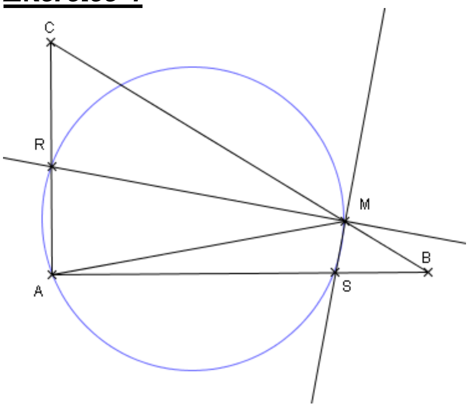
Puisque M est sur les deux cercles , on a d'une part : BM = BA er d'autre part CM = CA donc (BC) est la médiatrice de [AM] et donc (AM) et (BC) sont perpendiculaires .
Comme (AH) est une hauteur de ABC alors (AH) est perpendiculaire à (BC)
Les droites (AM) et (AH) sont donc parallèles ; elles ont un point commun : elles sont donc confondues et les points A , H et M sont alignés

Exercice 3



Dans le triangle ABC , (CI) et (AJ) sont des médianes donc O est le centre de gravité de ABC et (BO) la troisième médiane coupe [AC] en son milieu .
Dans le triangle ADC , (CL) et (AK) sont des médianes , P le centre de gravité , (DP) la troisième médiane coupe [AC] en son milieu .
Donc les droites (AC) , (BO) et (DP) se coupent en Z milieu de [AC] .

Exercice 4



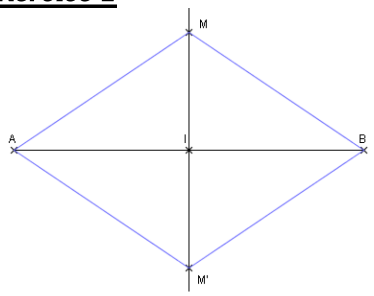
Par définition des points R et S , le triangle RAS est rectangle en A donc A est sur le cercle de diamètre [RS]

(RM) est la bissectrice de $C\hat{M}A$ donc $R\hat{M}A = \dfrac{C\hat{M}A}{2}$; de même $A\hat{M}S = \dfrac{A\hat{M}B}{2}$

Or $C\hat{M}A + A\hat{M}B = 180°$ donc $\dfrac{C\hat{M}A}{2} + \dfrac{A\hat{M}B}{2} = \dfrac{180°}{2} = 90°$ donc $R\hat{M}S = R\hat{M}A + A\hat{M}S = 90°$ et M est sur le cercle de diamètre [RS]

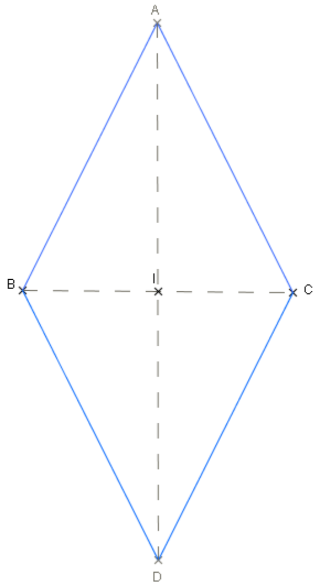
Exercices sur les parallélogrammes particuliers

Exercice 1



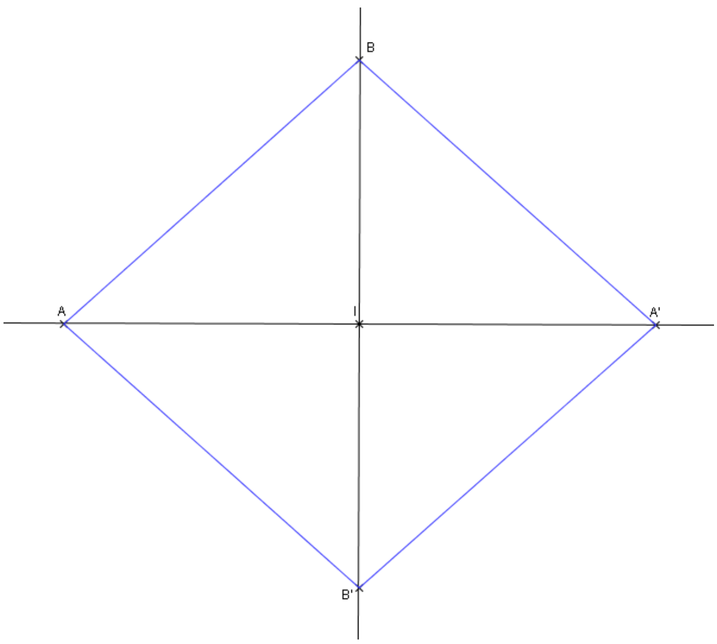
Par définition de la médiatrice , [MM’] et [AB] sont perpendiculaires et se coupent au milieu de [AB] . Mais comme M’ est l’image de M par la symétrie de centre I , I est aussi le milieu de [MM’]
Les diagonales ont donc même milieu : AMBM’ est un parallélogramme
Les diagonales sont perpendiculaires : AMBM’ est un losange .

Exercice 2



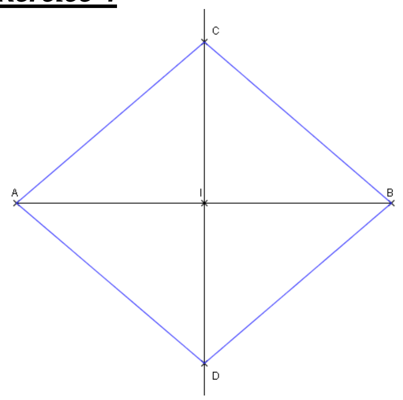
ABC est isocèle donc (AI) médiane est aussi hauteur et (AI) perpendiculaire à (BC) .
De plus , I est le milieu de [BC] par énoncé et le milieu de [AD] car D est l’image de A par la symétrie de centre I .
Les diagonales de ABDC se coupent en leur milieu (c’est donc un parallélogramme) et sont perpendiculaires : ABDC est donc un losange .

Exercice 3



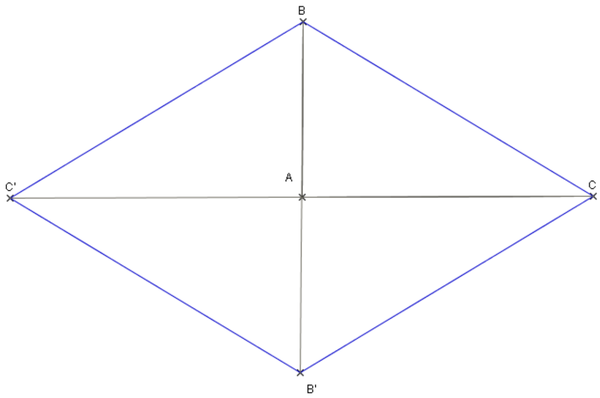
Par définition de la symétrie centrale I milieu de [BB’] et par énoncé , I milieu de [AA’] donc les diagonales de AB’A’B se coupent en leur milieu : AB’A’B est un parallélogramme .
Les droites d et d’ sont perpendiculaires , donc (AA’) et (BB’) sont perpendiculaires : un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange donc AB’A’B est un losange .

Exercice 4



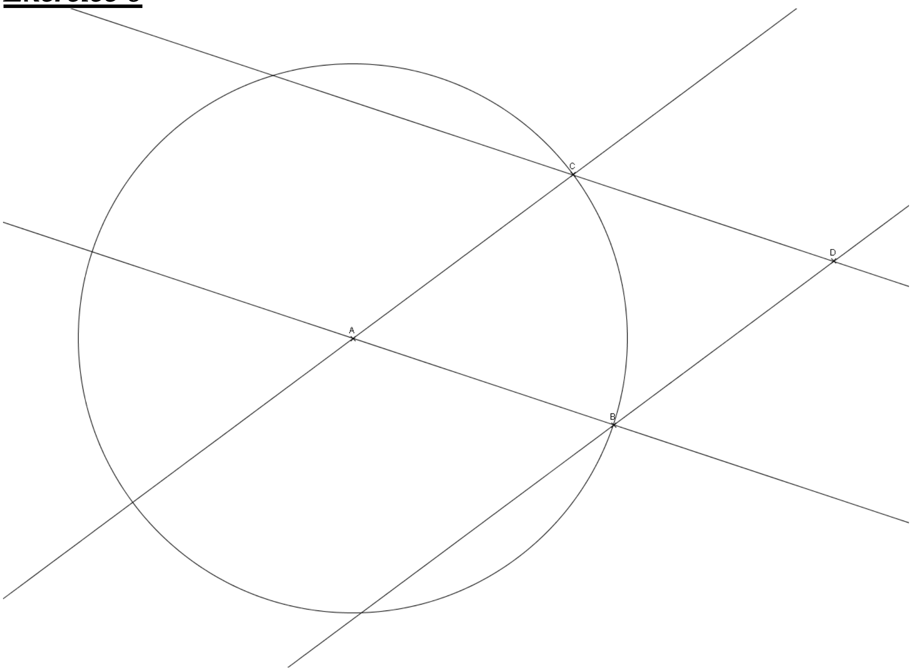
Par énoncé I milieu de [AB] et [CD] donc ADBC parallélogramme .
Par énoncé : CA = CB donc C est sur la médiatrice de [AB] : cette médiatrice est donc (CI)
(CD) est donc perpendiculaire à (AB) et ADBC est un losange car parallélogramme avec diagonales perpendiculaires .

Exercice 5



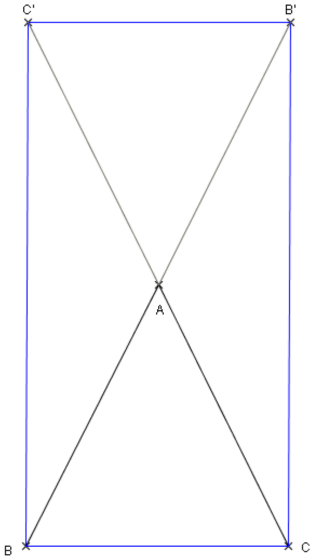
Par définition de la symétrie centrale , A est le milieu de [BB'] et de [CC'] donc BCB'C' est un parallélogramme
Les points B , A et B' d'une part et C , A et C' d'autre part sont alignés et ABC rectangle en A donc (BB') perpendiculaire à (CC') et BCB'C' losange .

Exercice 6



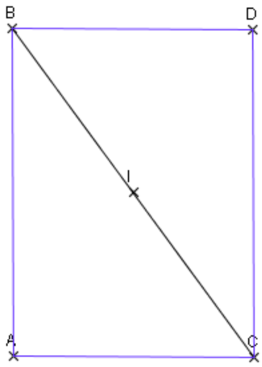
(AC) et (BD) sont parallèles puisque d et d' parallèles
(AB) et (CD) parallèles puisque D est sur la parallèle à (AB) passant par C
Donc ACDB est un parallélogramme (ses côtés opposés parallèles deux à deux)
AB = AC par énoncé donc ACDB est un parallélogramme avec deux côtés consécutifs égaux ; c'est donc un losange .

Exercice 7



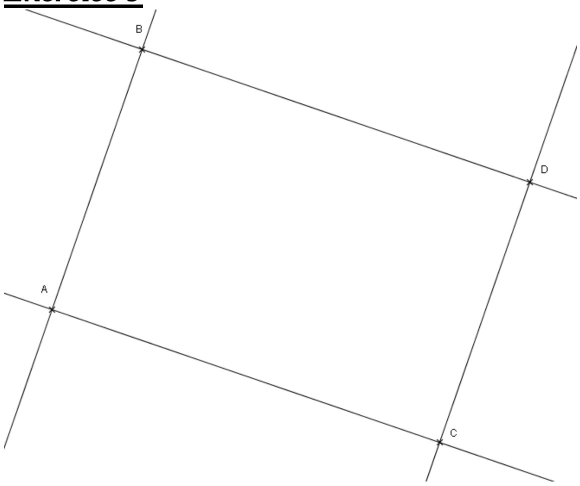
Par définition de la symétrie centrale , [CC’] et [BB’] ont le même milieu A : BCB’C’ est donc un parallélogramme .
La symétrie conserve les longueurs donc AC = AC’ et AB = AB’ et puisque AB = AC alors CC’= CA + AC’ = 2 AC = 2 AB = BB’
Les diagonales du parallélogramme BCB’C’ étant de même longueur , alors BCB’C’ est un rectangle .

Exercice 8



Par la définition de la symétrie centrale , I est le milieu de [AD] mais c’est aussi celui de [BC] par énoncé donc ACDB est un parallélogramme .
BAC est rectangle en A donc ACDB est un parallélogramme avec un angle droit , c’est un rectangle .

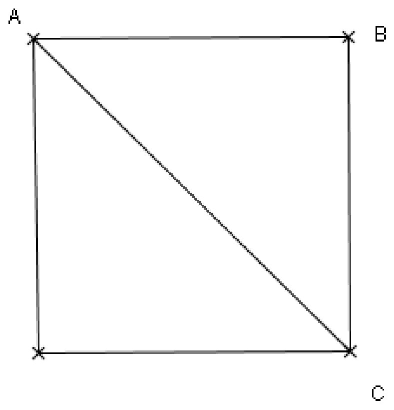
Exercice 9

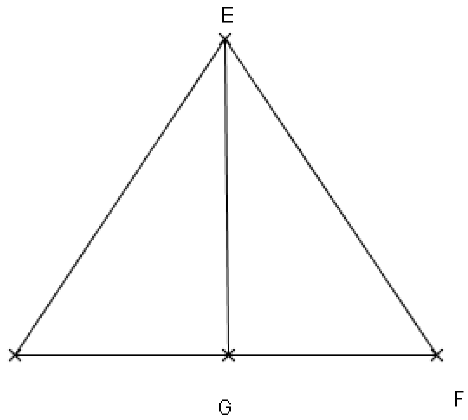


Par énoncé , (AC) parallèle à (BD) et (AB) parallèle à (CD) donc ACDB parallélogramme
De plus , (AB) perpendiculaire à (AC) donc ABDC est un rectangle

Pythagore et compagnie

Exercice 1

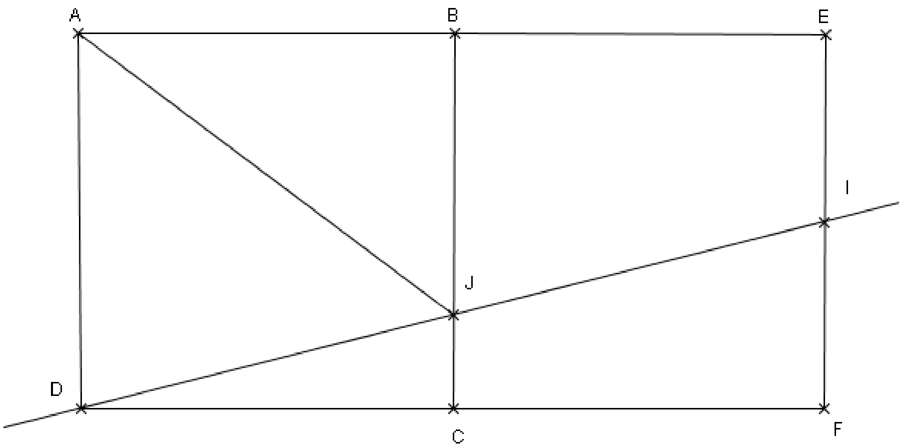




1) Par Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ donc AC = $a\sqrt{2}$ cm
2) Par Pythagore : $EF^2 = EG^2 + GF^2$ donc $EG^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$ et donc

   $EG = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ cm .

Exercice 2



Dans le triangle DIF , on utilise Pythagore :

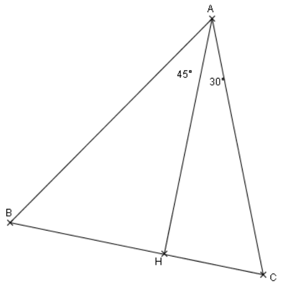
$$DI^2 = IF^2 + DF^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (2a)^2 = \frac{a^2}{4} + 4a^2 = \frac{17a^2}{4} \text{ donc DI = } \frac{a\sqrt{17}}{2}$$

Dans le triangle DIF , par Thalès : $\frac{JC}{IF} = \frac{DC}{DF}$ donc $JC = \frac{DC \times IF}{DF} = \frac{a \times \frac{a}{2}}{2a} = \frac{a}{4}$

Dans ABJ : BJ = $BC - CJ = a - \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$

Pythagore : $AJ^2 = AB^2 + BJ^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = a^2 + \frac{9a^2}{16} = \frac{25a^2}{16}$ donc $AJ = \frac{5a}{4}$

Exercice 3



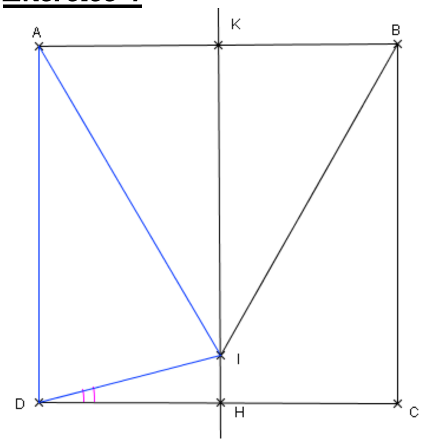
On va calculer BH puis HC

$\tan B\hat{A}H = \dfrac{BH}{AH}$ donc $BH = 3 \times \tan 45 = 3$ cm

$\tan C\hat{A}H = \dfrac{CH}{AH}$ donc $CH = 3 \times \tan 30 = 3 \times \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ cm

Donc BC = $3 + \sqrt{3}$ cm

Exercice 4



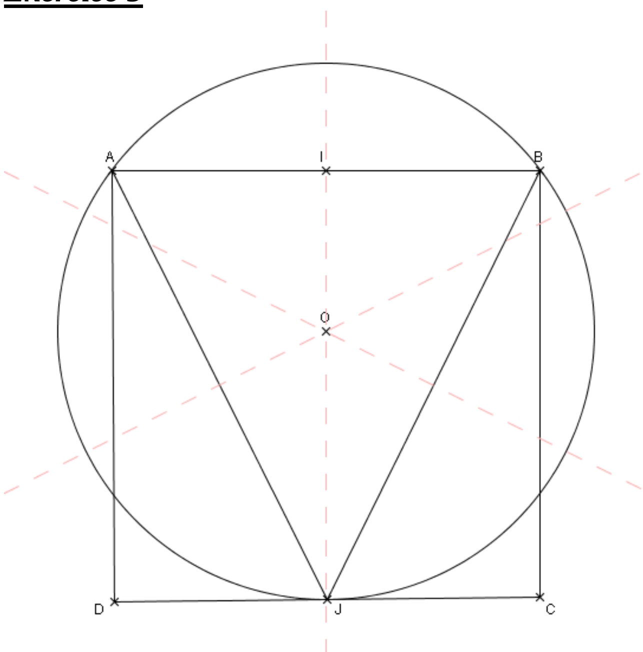
1) ABCD est un carré donc AB = AD . Le triangle ABI est équilatéral donc AI = AB et par suite AD = AB

$D\hat{A}B = 90°$ car ABCD carré et $B\hat{A}I = 60°$ car ABI équilatéral donc $D\hat{A}I = 30°$. Le triangle DAI est isocèle en A donc $A\hat{D}I = \dfrac{180-30}{2} = 75°$ et $H\hat{D}I = 90 - 75 = 15°$

2) ABI est équilatéral donc K est le milieu de [AB] et on peut utiliser le théorème de Pythagore dans AIK : IK = $\sqrt{1-\dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm .

IH = 1 – IK = $1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm

Exercice 5



1) On trace les médiatrices (en rose)
2) Par Pythagore , $AJ^2 = AD^2 + DJ^2 = JC^2 + BC^2 = BJ^2$

Donc ABJ isocèle en J

(OI) médiatrice est aussi hauteur et passe donc par J .

(OI) est la médiatrice de [AB] et puisque (OI) perpendiculaire à (AB) alors (OI) perpendiculaire à (DC) .

Donc (OJ) perpendiculaire à (CD) et ceci est la définition de (DC) tangente du cercle en J .

3) OBA isocèle et OA = OB = r

OI = IJ – OJ = a – r

Pythagore : $OB^2 = OI^2 + IB^2$ donc

$r^2 = (a-r)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = a^2 + r^2 - 2ar + \dfrac{a^2}{4}$

donc $\dfrac{5a^2}{4} - 2ar = 0$ et donc $r = \dfrac{5a}{8}$