Corrigé du devoir commun du 3/2

Ex 1 : **1)** Pour remplir le tableau : 600 dans la case « total du total », puis $\frac{1}{3} \times 600 = \frac{600}{3} = 200$ pour le total des vaccinés, 240 pour le total des malades et $\frac{240}{15} = 16$ pour les malades vaccinés. Enfin on complète les cases restantes par soustractions :

	Malades	Non malades	Total
Vaccinés	**16**	184	**200**
Non vaccinés	224	176	400
Total	**240**	360	**600**

2) Il y a équiprobabilité, on utilise la formule : $P(A) = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables\ \text{à A}}{Nombre\ de\ cas\ possibles}$.

P(V) = $\frac{\mathbf{200}}{\mathbf{600}} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$; P(M) = $\frac{\mathbf{240}}{\mathbf{600}} = \frac{2}{5} = 0{,}4$ et P(V $\cap$ M) = $\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{600}} = \frac{2}{75} \approx 0{,}027$.

3a) Le nombre de cas possibles est maintenant le nombre de personnes non vaccinées : 400, et le nombre de cas favorables est, parmi elles, le nombre de personnes malades : 224. Donc p = $\frac{\mathbf{224}}{\mathbf{400}} = \mathbf{0{,}56}$.

b) Ici q = $\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{200}} = \mathbf{0{,}08}$. **c)** $\frac{p}{q} = \frac{0{,}56}{0{,}08} = \mathbf{7} > 1$. Le vaccin est **efficace**, et même très efficace.

Ex 2 : **1a)** Pour les lectures d'images : on part de – 2 ; 4 ou 8 sur l'axe des abscisses, on se déplace verticalement jusqu'à la courbe et on lit l'ordonnée du point obtenu. Pour la lecture d'antécédent, on part de – 3 sur l'axe des ordonnées, on se déplace horizontalement jusqu'à la courbe et on lit l'abscisse :

Valeurs de x	– 2	4	8	**9**
Valeurs de $f(x)$	**3**	**4**	**0**	– 3

b) • Pour résoudre l'équation f(x) = 4, on trace la droite horizontale issue de l'ordonnée 4, on repère les points où elle croise la courbe et on lit les abscisses de ces points : **S = {– 3 ; 4 ; 7,2}** environ.

• Pour résoudre l'inéquation f(x) ≤ 2, on trace la droite horizontale issue de l'ordonnée 2, on repère la partie de la courbe qui est **en-dessous** de cette droite et on lit les abscisses : **S = [– 1,6 ; 2] ∪ [7,6 ; 9]**. On orientera les crochets vers l'intérieur à cause du symbole « ≤ ».

c) Pour dresser le tableau de signes de la fonction, on regarde sur quels intervalles la courbe est au-dessus ou en-dessous de l'axe des abscisses. On n'oubliera pas les zéros.

x	**– 3**		**– 1**		**1**		**8**		**9**
f(x)		+	**0**	–	**0**	+	**0**	–	

d) Pour établir les variations de la fonction, on repère les intervalles sur lesquels la courbe « monte » et ceux sur lesquels la courbe « descend ». On n'oubliera pas de noter les images au bout des flèches…

x	**– 3**		**0**		**6**		**9**
f(x)	**4**	↘	**– 2**	↗	**6**	↘	**– 3**

e) Le maximum de f sur [– 3 ; 9] est **6** atteint en x = 6. Le minimum est **– 3** atteint en x = 9.

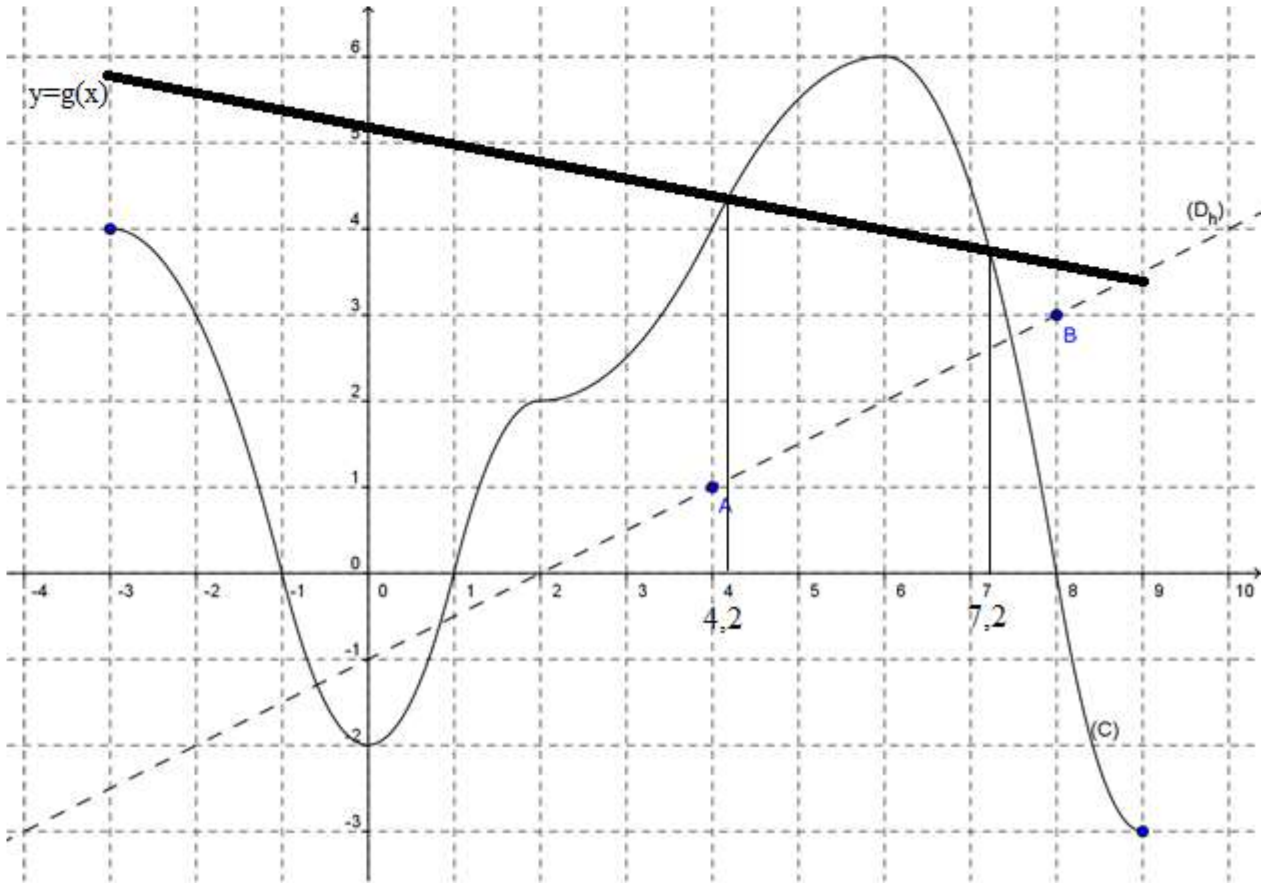
2a) Pour représenter la fonction affine, on calcule deux images, par exemple g(– 3) = – 0,2 × (– 3) + 5,2 = 5,8 et g(9) = – 0,2 × 9 + 5,2 = 3,4. On place les points de coordonnées (– 3 ; 5,8) et (9 ; 3,4) et on trace la droite passant par ces deux points (voir page suivante).

b) Pour résoudre l'inéquation f(x) ≥ g(x), on repère les intervalles sur lesquels la courbe de f est **au-dessus** de la droite qui représente g. **S = [4,2 ; 7,2]** environ.

3) On note que A(4 ; 1) et B(8 ; 3). On pose h(x) = ax + b et on appelle $x_1 = 4$ et $x_2 = 8$.

a = $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(8)-f(4)}{8-4} = \frac{3-1}{8-4} = \frac{2}{4} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$. Puis pour calculer b, on remplace x par 4 (ou par 8) :

f(4) = $\frac{1}{2} \times 4$ + b ; 1 = 2 + b ; 1 – 2 = b ; **– 1** = b. On peut conclure que **h(x) =** $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ **x – 1**.



Ex 3 : **1)** Voir page suivante.

2) • $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2+4)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{\mathbf{45}} = \mathbf{3\sqrt{5}}$.

• $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(6-2)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{\mathbf{80}} = \mathbf{4\sqrt{5}}$.

• $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(6+4)^2 + (-5-0)^2} = \sqrt{10^2 + (-5)^2} = \sqrt{100+25} = \sqrt{\mathbf{125}}$
$= \mathbf{5\sqrt{5}}$.

3) Il n'y a pas de distances égales donc le triangle n'est **ni équilatéral**, **ni isocèle** ; est-il rectangle ?
$AC^2 = \sqrt{125}^2 = 125$; $AB^2 + BC^2 = \sqrt{45}^2 + \sqrt{80}^2 = 45 + 80 = 125$ donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$.
D'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle (ABC) est **rectangle en B**.

4) Notons $(x_D\ ;\ y_D)$ les coordonnées de D.

• (ABCD) est un parallélogramme si et seulement si ses **diagonales** [AC] et [BD] ont le **même milieu**.
Appelons K le milieu de [AC] ,donc $K\left(\frac{-4+6}{2}\ ;\frac{0+(-5)}{2}\right)$ donc $K(1\ ;-2{,}5)$.
K doit être aussi celui de [BD] ; on doit donc avoir :
$\begin{cases} x_k = \frac{x_B + x_D}{2} \\ y_k = \frac{y_B + y_D}{2} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} 1 = \frac{2 + x_D}{2} \\ -2{,}5 = \frac{3 + x_D}{2} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} 2 = 2 + x_D \\ -5 = 3 + y_D \end{cases}$ d'où $\begin{cases} 2 - 2 = x_D \\ -5 - 3 = y_D \end{cases}$ d'où $\begin{cases} 0 = x_D \\ -8 = y_D \end{cases}$
Donc **D(0 ;-8)**

• Ou bien : (ABCD) parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.
Or $\overrightarrow{BC}(6-2; -5-3)$ donc $\overrightarrow{BC}(4; -8)$ et $\overrightarrow{AD}(x_D + 4; y_D - 0)$.
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 4 = 4 \\ y_D - 0 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 - 4 = 0 \\ y_D = -8 \end{cases}$ donc **D(0 ;-8)**.

5) (ABCD) est un parallélogramme ayant un angle droit (en B), c'est donc au moins un **rectangle**.
Le cercle circonscrit au rectangle (ABCD) a pour centre le milieu de ses diagonales [AC] ou [BD] et pour rayon la moitié de la longueur d'une de ses diagonales [AC] ou [BD]. Le centre est donc le point **K(1 ;-2,5)** et le rayon $\frac{AC}{2} = \frac{\mathbf{5\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}$.

6) A(-4 ;0) et B(2 ;3) ; $x_A \neq x_B$ donc l'équation de (AB) est du type y = ax+b.

<u>• Cherchons a</u> : $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-0}{2+4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

<u>• Cherchons b</u> : A(−4 ;0) est un point de (AB) donc $0 = \frac{1}{2} \times (-4) + b \Leftrightarrow 0 = -2 + b \Leftrightarrow 2 = b$ $\Leftrightarrow b = 2$. Donc **(AB) :** $\mathbf{y = \frac{1}{2}x + 2}$.

<u>• Vérifions</u> : $\frac{1}{2} \times x_A + 2 = \frac{1}{2} \times (-4) + 2 = 0 = y_A$ et $\frac{1}{2} \times x_B + 2 = \frac{1}{2} \times 2 + 2 = 3 = y_B$.

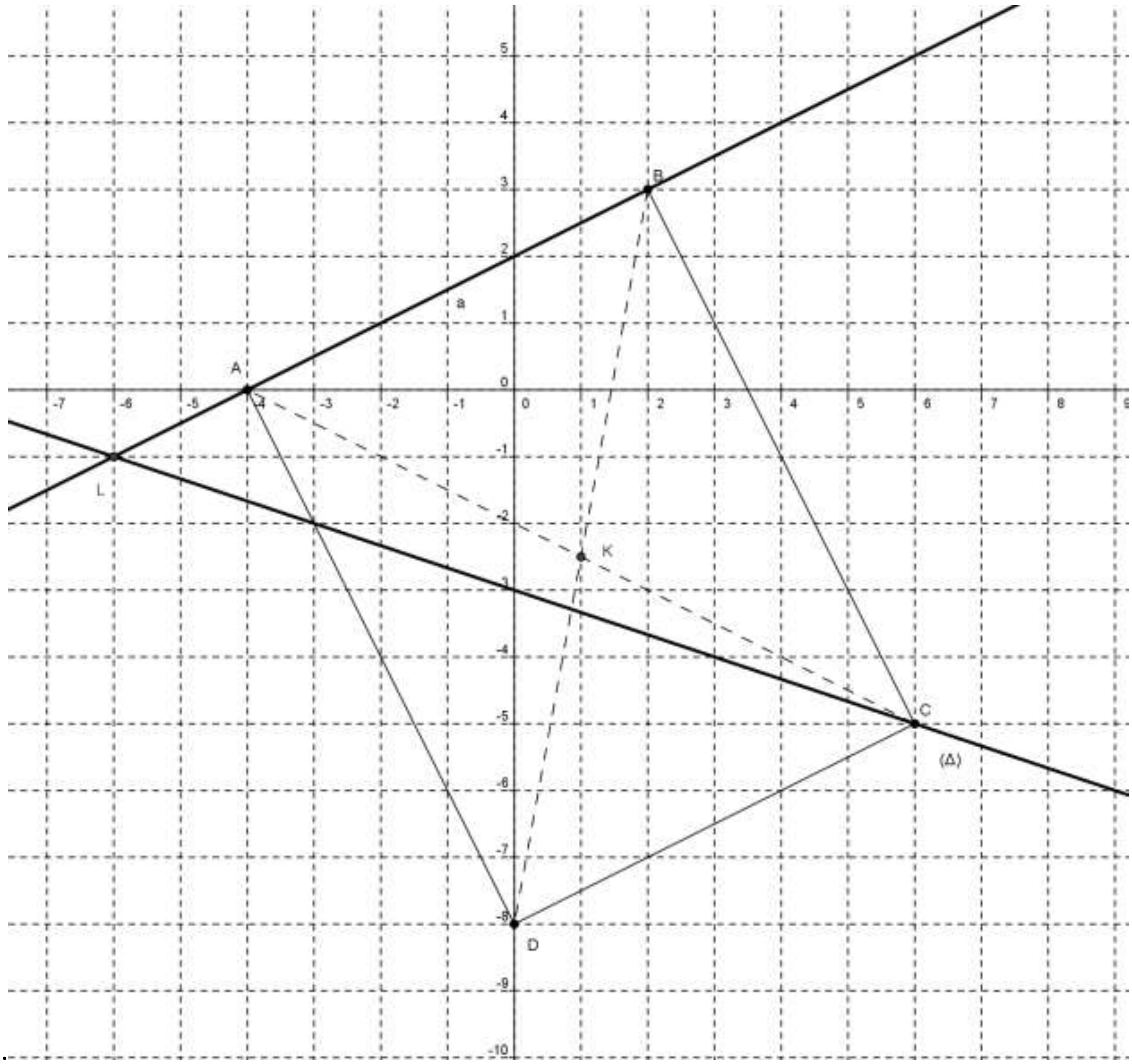
7) La droite (Δ) passe par les points F(0 ;-3) et G(-3 ;-2)

8) H(-2007 ;666) : $-\frac{1}{3} \times x_H - 3 = -\frac{1}{3} \times (-2007) - 3 = 666 = y_H$ donc **H est un point de (Δ).**

9) $\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{3}$ donc (Δ) et (AB) n'ont pas le même coefficient directeur donc elles ne sont **pas parallèles** donc elles sont **sécantes** en un point L ; notons (x ;y) ses coordonnées ; elles vérifient le système :

$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -\frac{1}{3}x - 3 \end{cases}$ d'où $\frac{1}{2}x + 2 = -\frac{1}{3}x - 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = -2 - 3 \Leftrightarrow \frac{3}{6}x + \frac{2}{6}x = -5 \Leftrightarrow \frac{5}{6}x = -5$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5}{\frac{5}{6}} = -5 \times \frac{6}{5} \Leftrightarrow x = -6 \text{ puis } \begin{cases} y = \frac{1}{2} \times (-6) + 2 = -1 \\ y = -\frac{1}{3} \times (-6) - 3 = -1 \end{cases} \text{ d'où } \mathbf{L(-6; -1)}$$



<u>Ex 4 :</u> 1) $x \to x^2 \to -4x^2 \to -4x^2 - 8x \to -4x^2 - 8x + 32$. Donc $\mathbf{f(x) = -4x^2 - 8x + 32}$.

$2 \to 2^2 = 4 \to -4 \times 4 = -16 \to -16 - 8 \times 2 = -32 \to -32 + 32 = 0$. On a bien $\mathbf{f(2) = 0}$.

2) On développe $(2x + 8)(-2x + 4) = -4x^2 + 8x - 16x + 32 = -4x^2 - 8x + 32 = f(x)$.

3) On développe $-4(x + 1)^2 + 36 = -4(x^2 + 2x + 1) + 36 = -4x^2 - 8x - 8 + 36 = -4x^2 - 8x + 32 = f(x)$.

4a) Pour un calcul d'image, la forme développée est la mieux adaptée :

L'image de 0 est $f(0) = -4 \times 0^2 - 8 \times 0 + 32 = \mathbf{32}$.

b) $f(-1) = -4 \times (-1)^2 - 8 \times (-1) + 32 = -4 \times 1 + 8 + 32 = -4 + 8 + 32 = \mathbf{36}$.

c) Pour déterminer les antécédents de 32, on utilise aussi la forme développée : $-4x^2 - 8x + \cancel{32} = \cancel{32}$

$\Leftrightarrow -4x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(-4x - 8) = 0$; soit $x = 0$, soit $-4x - 8 = 0 \Leftrightarrow -4x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{-4} \Leftrightarrow x = -2$.

$\mathbf{S = \{-2 ; 0\}}$.

d) Pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, on utilise la forme factorisée : $(2x + 8)(-2x + 4) = 0$.

Soit $2x + 8 = 0$ soit $-2x + 4 = 0$

$2x = -8$ $-2x = -4$

$x = \frac{-8}{2}$ $x = \frac{-4}{-2}$

$x = -4$ $x = 2$ Donc $\mathbf{S = \{-4 ; 2\}}$.

e) Pour le tableau de signes, on utilise aussi la forme factorisée. On pensera à placer le signe du coefficient directeur *a* à droite de zéro.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$2x + 8$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-2x + 4$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$\mathbf{(2x + 8)(-2x + 4)}$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	

Résoudre l'inéquation $f(x) < 0$ signifie trouver les valeurs de x pour lesquelles $(2x + 8)(-2x - 4)$ est **strictement négatif**. On cherche donc les signes – sur la dernière ligne du tableau.

$\mathbf{S =]-\infty ; -4[\cup]2 ; +\infty[}$. Les crochets sont ouverts à cause du « strictement »…

f) La courbe de f est en-dessous de l'axe des abscisses à condition que $f(x) < 0$. On retrouve donc les intervalles obtenus à la question précédente : sur $\mathbf{]-\infty ; -4[}$ et sur $\mathbf{]2 ; +\infty[}$.

g) Pour résoudre l'inéquation $f(x) \geq 32$ on revient à la forme développée : $-4x^2 - 8x + 32 \geq 32$

$\Leftrightarrow -4x^2 - 8x \geq 0 \Leftrightarrow x(-4x - 8) \geq 0$. On dresse un nouveau tableau :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-4x - 8$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$x(-4x - 8)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On recherche le signe + sur la dernière ligne du tableau. $\mathbf{S = [-2 ; 0]}$.