Corrigé fiche 8 : équations de droites et de cercles

Applications directes

Exercice 1

1) Pour la première , voici le corrigé par les deux méthodes :

Première méthode : calcul du coefficient directeur puis de l'ordonnée à l'origine

Une équation de (AB) est de la forme y = mx + p

$$m = \frac{4-7}{9-5} = \frac{-3}{4}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + p\ , A\ est\ sur\ (AB)\ donc\ :\ 7 = -\frac{3}{4} \times 5 + p\ et\ p = \frac{43}{4}$$

$$(AB)\ :\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{43}{4}$$

Deuxième méthode : en utilisant la colinéarité

M(x ;y) est sur (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}\ et\ \overrightarrow{AB}$ sont colinéaires :

$$\overrightarrow{AM}(x-5; y-7)\ ;\ \overrightarrow{AB}(4;-3)\ colinéaires\ si\ -3(x-5) - 4(y-7) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 15 - 4y + 28 = 0 \Leftrightarrow -3x - 4y + 43 = 0$$

$$(AB): -3x - 4y + 43 = 0$$

2) En observant bien , A et B ont la même abscisse donc l'équation de (AB) est x = 3
3) Deux droites sont parallèles si elles ont le même coefficient directeur donc le coefficient directeur de (AB) est 5 :

$$y = 5x + p\ , A\ est\ sur\ (AB)\ donc\ 9 = 5 \times 7 + p\ et\ p = -26$$

$$(AB)\ :\ y = 5x - 26$$

Exercice 2

Pour cet exercice , là encore deux méthodes :

Première méthode : on utilise les vecteurs normaux

(AB) est perpendiculaire à d donc le vecteur normal de d est le vecteur directeur de (AB)

Vecteur normal de d : (2 ;8) donc le vecteur directeur de (AB) est (2 ;8) = (-b ;a)

$$(AB)\ :\ 8x - 2y + c = 0\ \ , A\ sur\ (AB)\ donc\ 16 - 2 + c = 0\ ;\ c = -14$$

$$(AB)\ :\ 8x - 2y - 14 = 0\ \ \Leftrightarrow 4x - y - 7 = 0$$

Deuxième méthode : M(x ;y) est sur (AB) si d et (AM) sont perpendiculaires

$$\overrightarrow{AM}(x-2; y-1)\ ;\ \vec{u}(-8;2)\ vect\ dir\ de\ d\ :\ \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0\ donc$$

$$-8(x-2) + 2(y-1) = 0 \Leftrightarrow -8x + 2y + 14 = 0 \Leftrightarrow 4x - y - 7 = 0$$

2) M(x ;y) est sur (AB) si (IM) et (CD) sont perpendiculaires avec I milieu de [CD]

$$I(5;1)\ , \overrightarrow{IM}(x-5; y-1)\ , \overrightarrow{CD}(-4;-14)\ :\ -4(x-5) - 14(y-1) = 0$$

$$(AB)\ :\ -4x - 14y + 34 = 0 \Leftrightarrow -2x - 7y + 17 = 0$$

Exercice 3

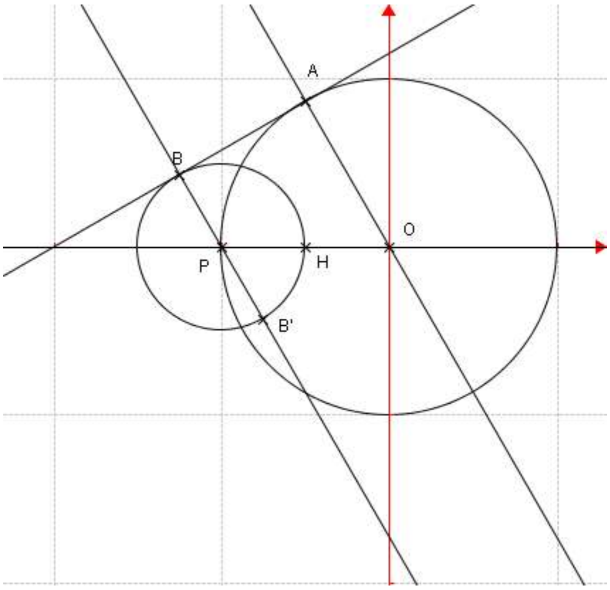
1) Commençons par calculer le rayon : $R^2 = AB^2 = (4-8)^2 + (0-12)^2 = 160$

$$(x-8)^2 + (y-12)^2 = 160$$

2) Le centre est I milieu de [AB] : I(-2 ;5) ; $R^2 = IA^2 = 13$

$$(x+2)^2 + (y-5)^2 = 13$$

Approfondissement



1) Il semble que (AB) soit tangente aux deux cercles
2) Une équation de C est : $x^2 + y^2 = 1$. Vérifions que les coordonnées de A et de P vérifient cette équation :

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1 \;donc\; A\; est\; sur\; C$$
$$(-1)^2+0^2=1 \;donc\; P\; est\; sur\; C$$

3) (OA) et d ont le même coefficient directeur donc :

$$d: y=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}x+p \;donc\; y=-\sqrt{3}x+p\;, P\; est\; sur\; d:\; 0=\sqrt{3}+p \;donc\; p=-\sqrt{3}$$
$$d: y=-\sqrt{3}x-\sqrt{3}$$

4) $H\left(-\frac{1}{2};0\right)$; $PH^2=\frac{1}{4}$ $donc\; C' : (x+1)^2+y^2=\frac{1}{4}$
5) B est l'intersection de C' et d :

$$\begin{cases} y=-\sqrt{3}x-\sqrt{3} \\ (x+1)^2+y^2=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\sqrt{3}x-\sqrt{3} \\ (x+1)^2+3(x+1)^2=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\sqrt{3}x-\sqrt{3} \\ (x+1)^2=\frac{1}{16} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-\sqrt{3}x-\sqrt{3} \\ x=\frac{1}{4}-1 \;ou\; x=-\frac{1}{4}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\sqrt{3}x-\sqrt{3} \\ x=-\frac{3}{4} \;ou\; x=-\frac{5}{4} \end{cases}$$
$$B\left(-\frac{5}{4};\frac{5\sqrt{3}}{4}-\sqrt{3}\right)$$

6) Il faut montrer que (AB) est perpendiculaire à (BP) et à (AO)

$$\overrightarrow{AB}\left(-\frac{3}{4};\frac{3\sqrt{3}}{4}-\sqrt{3}\right) ; \overrightarrow{AO}\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) ; \overrightarrow{BP}\left(\frac{1}{4};-\frac{5\sqrt{3}}{4}+\sqrt{3}\right)$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=-\frac{3}{8}-\frac{9}{8}+\frac{3}{2}=0\;;\;\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}=-\frac{3}{16}-\frac{45}{16}+\frac{9}{4}+\frac{15}{4}-3=0$$

Corrigé fiche 8 : équations de droites et de cercles

Algorithmique

Variables

a , a' , b , b' : réels

Début

Saisir a

Saisir b

Saisir a'

Saisir b'

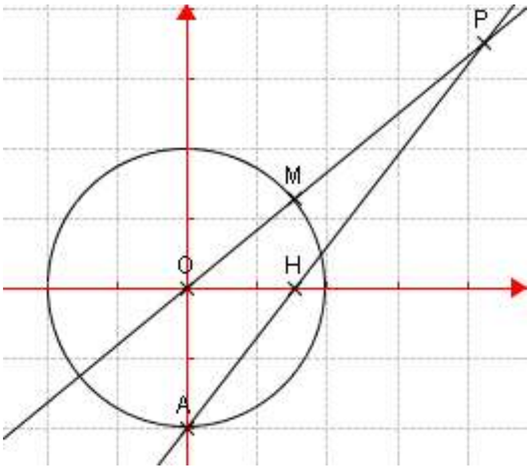
Si aa' + bb' = 0 alors afficher « les droites sont perpendiculaires »

Sinon afficher « les droites ne sont pas perpendiculaires »

Finsi

Fin

Question ouverte



On peut faire plusieurs dessins ou utiliser un logiciel de géométrie pour faire bouger M . On s'aperçoit alors que P semble être sur une parabole Sinon , on peut tout simplement essayer de trouver les coordonnées de P !

M(a;b) est sur le cercle d'équation : $x^2 + y^2 = 4$

H(a ;0)

Equation de (OM) : $y = \frac{b}{a}x$

Equation de (AH) : $y = \frac{2}{a}x - 2$

Première remarque : si b = 2 , les deux droites sont parallèles et il n'y a pas de point P

Posons donc b ≠ 2

Coordonnées de P :

$$\begin{cases} y = \dfrac{b}{a}x \\ y = \dfrac{2}{a}x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{b}{a}x \\ 0 = \left(\dfrac{2-b}{a}\right)x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2a}{2-b} \\ y = \dfrac{2b}{2-b} \end{cases}$$

$$P\left(\frac{2a}{2-b};\frac{2b}{2-b}\right)$$

On sait de plus que $a^2 + b^2 = 4$

$$\left(\frac{2a}{2-b}\right)^2 = \frac{4a^2}{(2-b)^2} = \frac{16-4b^2}{(2-b)^2} = \frac{4(4-b^2)}{(2-b)^2} = \frac{4(2-b)(2+b)}{(2-b)^2} = \frac{4(2+b)}{2-b}$$

$$x^2 = \frac{8+4b}{2-b} \; donc \; \frac{1}{4}x^2 = \frac{2+b}{2-b} = \frac{2-b+2b}{2-b} = 1 + y \; donc \; y = \frac{1}{4}x^2 - 1$$

Donc P est sur la parabole d'équation $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$