Corrigé de la fiche 7 : produit scalaire

Application directe

1) $\overrightarrow{AB}(2;-2)\ et\ \overrightarrow{BC}(-2;-2)\ donc\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 2\times(-2)+(-2)\times(-2) = 0$: (AB) et (BC) sont donc perpendiculaires .

$$AB = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ ;\ BC = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

AB = BC donc le triangle ABC est rectangle isocèle en B .

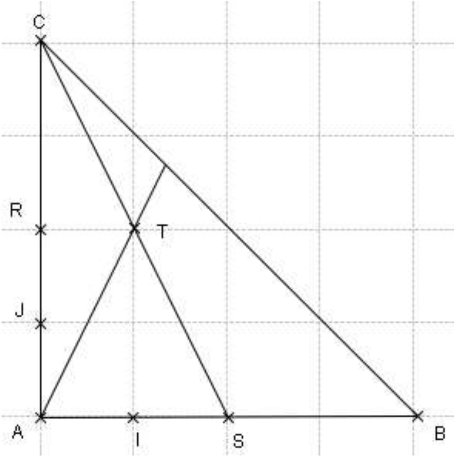
2) ABCD est un carré si et seulement ABCD est un parallélogramme puisque ABC est déjà rectangle isocèle .

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} : \begin{cases} 2 = 5-x \\ -2 = 4-y \end{cases} donc \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases} donc\ D(3;6)$$

Approfondissement

Exercice 1

1) On a déjà AI = AJ = 1 donc le repère est normé . Il reste à montrer que (AI) et (AJ) sont orthogonales mais ABC rectangle en A donc (AB) et (AC) perpendiculaires et puisque I est sur (AB) et J sur (AC) on a bien (AI) et (AJ) perpendiculaires .
2) On fait la figure

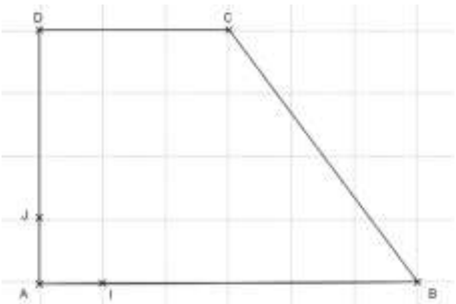


A(0 ;0) B(4 ;0) C(0 ;4) I(1 ;0) J(0 ;1) S(2 ;0) R(0 ;2) T(1 ;2)

3) Il faut montrer que (AT) et (RB) sont orthogonales :

$\overrightarrow{AT}(1;2);\ \overrightarrow{RB}(4;-2)\ et\ \overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{RB} = 4+(-4) = 0$

Exercice 2



1) A(0 ;0) , I(1 ;0) ; J(0 ;1) ; B(6 ;0) ; C(3 ;h) D(0 ;h)
2) $\overrightarrow{AC}(3;h);\ \overrightarrow{BD}(-6;h)\ .\ Or\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow -18+h^2 = 0 \Leftrightarrow h^2 = 18 \Leftrightarrow h = 3\sqrt{2}$

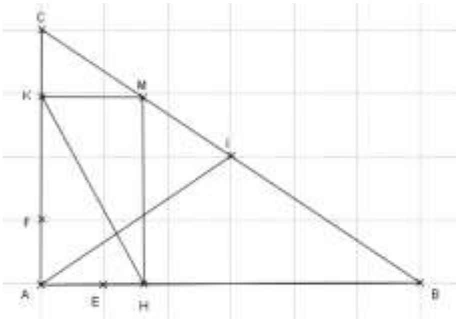
Algorithmique

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -xy+xy = 0\ et\ \|\vec{u}\|^2 = x^2+y^2 = \|\vec{v}\|^2$$

Pour que ABCD soit un carré , si $\overrightarrow{AB}(x;y)$ alors $\overrightarrow{BC}(-y;x)$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Variables
xa , xb , ya , yb : réels
xc , yc , xd , yd : réels
Début
Saisir xa
Saisir ya
Saisir xb
Saisir yb
Affecter à xc la valeur ya – yb + xb
Affecter à yc la valeur xb – xa + yb
Afficher « les coordonnées de C sont »
Afficher xc
Afficher yc
Affecter à xd la valeur xb – xa + xc
Affecter à yd la valeur yb – ya + yc
Afficher « les coordonnées de D sont »
Afficher xd
Afficher yd
Fin .

Question ouverte



Plaçons E sur [AB] et F sur [AC] tels que (A ,E ,F) soit un repère orthonormal

On a alors : A(0 ;0) E(1 ;0) F(0 ;1) B(b ;0) C(0 ;c)

$$I\left(\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)\ ;\overrightarrow{AI}\left(\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)$$

Posons M(x ;y) . M est sur (BC) donc les points M , B et C sont alignés .

$$\overrightarrow{MB}(b-x;-y)\ et\ \overrightarrow{BC}(-b;c)\ colinéaires:\ c(b-x)-yb=0$$

De plus , H(x ;0) et K(0 ;y) et on veut (HK) et (AI) perpendiculaires .

$$\overrightarrow{HK}(-x;y):\ \frac{-xb}{2}+\frac{yc}{2}=0$$

$$\begin{cases} xc+yb=bc \\ xb-yc=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xb-yc=0 \\ x(c^2+b^2)=bc^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xb-yc=0 \\ x=\dfrac{bc^2}{b^2+c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{bc^2}{b^2+c^2} \\ y=\dfrac{b^2c}{b^2+c^2} \end{cases}$$

Puisque b^2+c^2 n'est jamais nul , il existe un unique M sur (BC) qui vérifie la condition