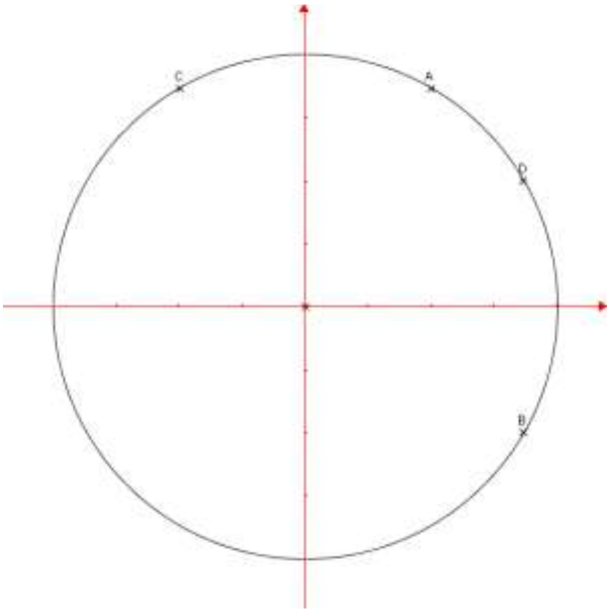
Corrigé fiche 6 : Trigonométrie

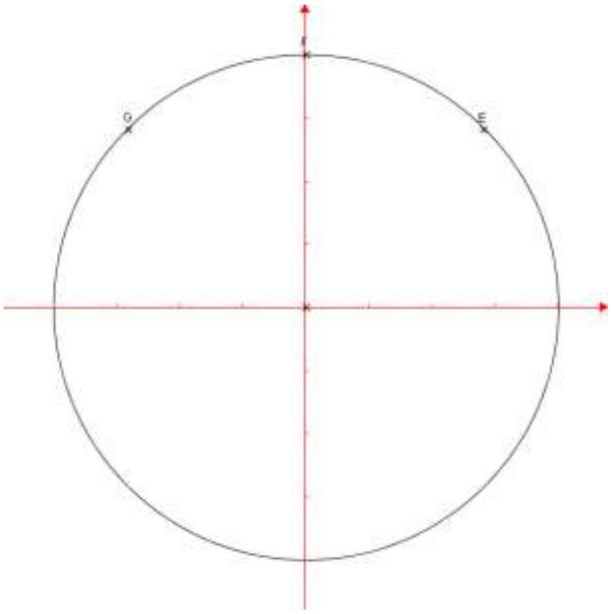
Applications directes

Exercice 1

$$45° = \frac{\pi}{4} rad \ ; \ 60° = \frac{\pi}{3} rad \ ; \ 30° = \frac{\pi}{6} rad \ ; \ 120° = \frac{2\pi}{3} rad \ ; \ 90° = \frac{\pi}{2} rad$$

Exercice 2





Exercice 3

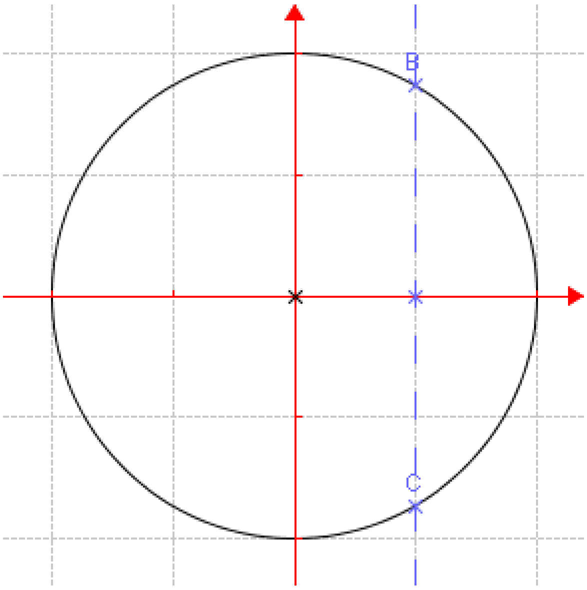
$$cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \ ; \ sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \ ; \ cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} ; \ sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \ ; \ cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

Exercice 4

Il faut connaître les valeurs remarquables et savoir utiliser un cercle trigonométrique .

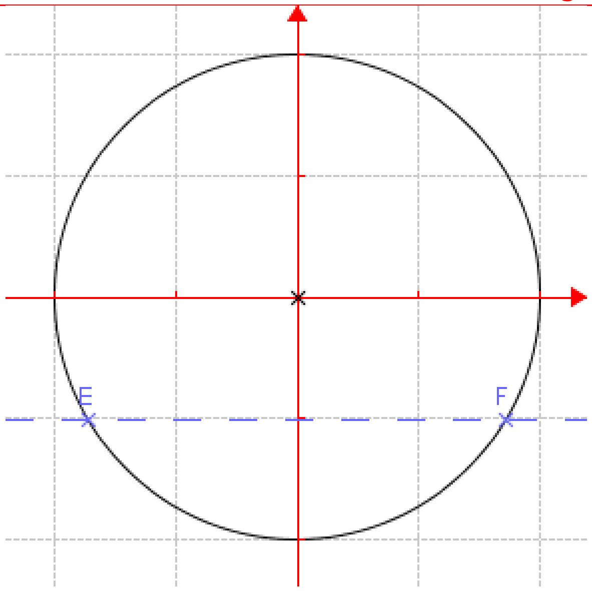
1) Par les valeurs remarquables , on sait que cos x = ½ correspond aux angles de la famille $\frac{\pi}{3}$



Il y a deux solutions possibles :

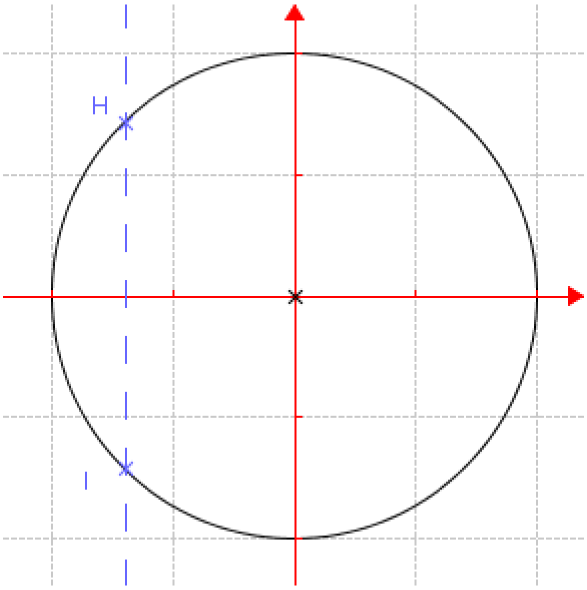
$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ (\ point\ B) \ ou \ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \ (point\ C)$$

2) On a :



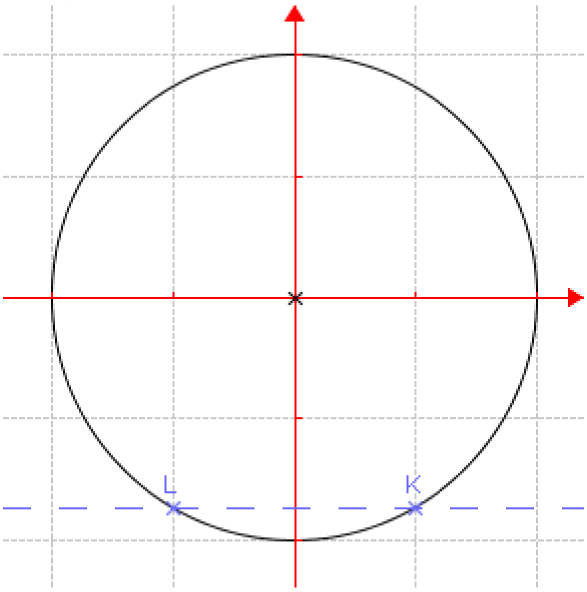
$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ (point } F) \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ (point } E)$$

3) On a :



$$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ (point } H) \text{ ou } x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ (point } I)$$

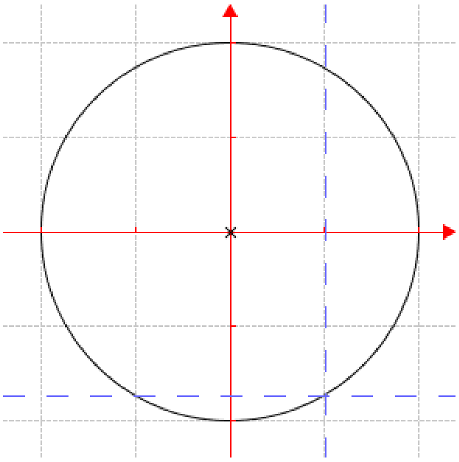
4) On a :



$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ (\,point\ K) \ ou\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (\,point\ L)$$

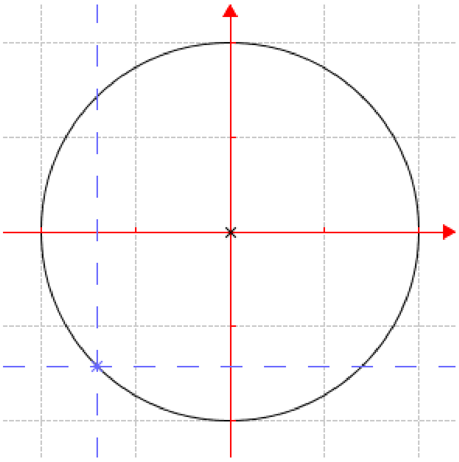
Exercice 5

1) On a :



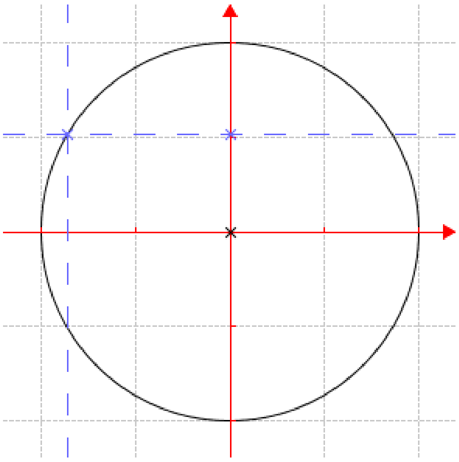
$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

2) On a :



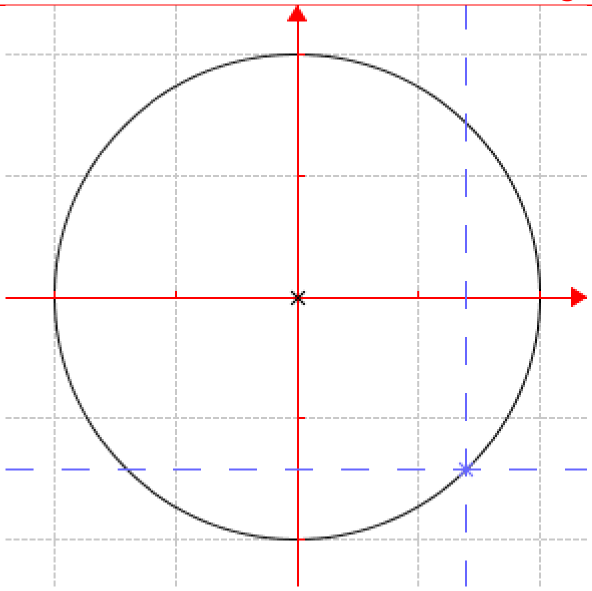
$$x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

3) On a :



$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

4) On a :



$$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Approfondissement

Exercice 1

1) On a :

$$cos\frac{2\pi}{5} = 2cos^2\frac{\pi}{5} - 1 \; donc \; cos^2\frac{\pi}{5} = \frac{cos\frac{2\pi}{5} + 1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4} + 1}{2} = \frac{\sqrt{5}+3}{8}$$

$$cos\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{8}} \; car \; cos\frac{\pi}{5} > 0$$

2) $\left(1+\sqrt{5}\right)^2 = 6 + 2\sqrt{5}$: on a donc :

$$cos\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{8}} = \sqrt{\frac{\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{2}}{8}} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

3) On a :

$$sin^2\frac{\pi}{5} + cos^2\frac{\pi}{5} = 1 \Leftrightarrow sin^2\frac{\pi}{5} = 1 - \frac{\sqrt{5}+3}{8} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$$

$$sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

4) On sait que :

$$\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5} \; donc \; cos\frac{4\pi}{5} = -cos\frac{\pi}{5} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Exercice 2

1) On sait que $cos\frac{\pi}{4} = sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc la solution évidente est $\frac{\pi}{4}$
2) On a :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}cos\,x + \frac{1}{\sqrt{2}}sinx = 1 \;\; donc \; cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 \; et \; \frac{\pi}{4} - x = 0 \; donc \; x = \frac{\pi}{4}$$

3) On a :

$$\begin{cases} X + Y = \sqrt{2} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} donc \begin{cases} (X+Y)^2 = 2 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} donc \begin{cases} 2XY = 1 \\ X + Y = \sqrt{2} \end{cases} d'où : \frac{1}{2Y} + Y = \sqrt{2} \; et \; 2Y^2 - 2\sqrt{2}Y + 1 = 0$$

Corrigé fiche 6 : Trigonométrie

$$(1-\sqrt{2}Y)^2 = 0 \; donc \; Y = \frac{\sqrt{2}}{2} \; et \; X = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \; donc \; x = \frac{\pi}{4}$$

4) $(cosx + sinx)^2 = 1 + 2cosxsinx = 1 + sin(2x) \; donc \; 1 + sin(2x) = 2 \; et \; sin(2x) = 1$

$$2x = \frac{\pi}{2} \; donc \; x = \frac{\pi}{4}$$

Algorithmique

On va utiliser $cosa = \frac{cos(2a)+1}{2}$

Variables
n , m : entiers
x : réel
Début
Saisir n
Affecter à m la valeur 0
Affecter à x la valeur 0
Tant que m < n faire
    Affecter à x la valeur (x+1)/2
    Affecter à m la valeur m + 1
Fin tant que
Afficher x
Fin

Question ouverte

Il faut commencer par trouver le rayon AB , en utilisant Pythagore :

$$\frac{AB\sqrt{3}}{2} = 3 \; donc \; AB = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

On connaît la formule du périmètre d'un cercle et l'angle $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{3}$ donc :

$2\pi R$	$\frac{\pi}{3}R$	périmètre
2π	$\frac{\pi}{3}$	Angle au centre

On a donc le périmètre du badge :

$$2AB + \frac{\pi}{3}AB = 2\sqrt{3}(2 + \frac{\pi}{3})$$