Corrigé fiche 5 : comportement d'une suite

Applications directes

Exercice 1

Rappel : n est toujours un entier naturel et donc toujours positif

$$1)\ u_{n+1}-u_n=\frac{3}{(n+1)^2}-\frac{3}{n^2}=\frac{3n^2-3(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{-6n-3}{n^2(n+1)^2}<0$$

La suite est donc décroissante

$$2)\ u_{n+1}-u_n=\frac{2(n+1)-1}{n+1+4}-\frac{2n-1}{n+4}=\frac{(2n+1)(n+4)}{(n+5)(n+4)}-\frac{(2n-1)(n+5)}{(n+4)(n+5)}$$
$$=\frac{9}{(n+4)(n+5)}>0$$

La suite est donc croissante

$$3)\ u_{n+1}-u_n=2^{n+1}-2^n=2^n(2-1)=2^n>0$$

La suite est donc croissante

$$4)\ u_{n+1}-u_n=\frac{1}{1+(n+1)^2}-\frac{1}{1+n^2}=\frac{1+n^2-1-(n+1)^2}{(1+n^2)(1+(n+1)^2)}$$
$$=\frac{-2n-1}{(1+n^2)(1+(n+1)^2)}<0$$

La suite est donc décroissante

$$5)\ u_{n+1}-u_n=\sqrt{3(n+1)+1}-\sqrt{3n+1}=\frac{3n+3+1-3n-1}{\sqrt{3(n+1)+1}+\sqrt{3n+1}}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{3n+4}+\sqrt{3n+1}}>0$$

La suite est donc croissante

NB : Quand on doit étudier le signe de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, on multiplie et on divise par l'expression conjuguée c'est-à-dire $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, on a en effet :

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

Exercice 2

Rappel : on cherche toujours une limite quand n tend vers $+\infty$ c'est-à-dire quand n devient très grand (penser en 10^{50} si c'est plus facile)

1) $u_n=\sqrt{n+2}$: quand n devient très grand , la racine est toujours très grande également donc la limite de la suite est $+\infty$

2) $u_n=0{,}98^n$: 0,98 < 1 donc plus je vais le multiplier par lui-même et plus le résultat diminue , donc la limite de la suite quand n tend vers $+\infty$ est 0

3) $u_n=3-\frac{5}{n}$: l'inverse d'un nombre très grand est un nombre très petit ($\frac{1}{10^{50}}=10^{-50}$) donc 5/n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc la limite de la suite est 3

4) $u_n=(-1)^n$: si n est pair , $(-1)^n=1$; si n impair , $(-1)^n=-1$. Et même quand n est très grand , il est pair puis impair , puis pair … donc la suite alterne toujours égale à 1 ou – 1 : elle n'a donc pas de limite .

Corrigé fiche 5 : comportement d'une suite

Approfondissement

Exercice 1

1) Comme rien n'est précisé dans l'énoncé , calculons quelques termes pour émettre une conjecture que nous démontrerons ensuite :

$$v_0 = -1\ ;\ v_1 = \frac{1}{4}(-1) + 2 = \frac{7}{4}\ ;\ v_2 = \frac{1}{4} \times \frac{7}{4} + 2 = \frac{39}{16}$$

$$w_0 = -1 - \frac{8}{3} = -\frac{11}{3}\ ; w_1 = \frac{7}{4} - \frac{8}{3} = -\frac{11}{12}\ ;\ w_2 = \frac{39}{16} - \frac{8}{3} = -\frac{11}{48}$$

Il semble que la suite (w_n) soit géométrique de raison ¼ ; démontrons le

Rappel : des exemples de premiers termes (même 3 584 789 !!!) ne sont pas une démonstration !

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{v_{n+1} - \frac{8}{3}}{v_n - \frac{8}{3}} = \frac{\frac{1}{4}v_n + 2 - \frac{8}{3}}{v_n - \frac{8}{3}} = \frac{\frac{1}{4}v_n - \frac{2}{3}}{v_n - \frac{8}{3}} = \frac{\frac{1}{4}\left(v_n - \frac{8}{3}\right)}{v_n - \frac{8}{3}} = \frac{1}{4}$$

La suite (w_n) est donc bien géométrique de raison ¼

2) Par les formules :

$$w_n = -\frac{11}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \ \textit{et donc}\ v_n = w_n + \frac{8}{3} = -\frac{11}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{8}{3}$$

3) On a :

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{11}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \frac{8}{3} + \frac{11}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{8}{3} = \frac{11}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\left[-\frac{1}{4} + 1\right] = \frac{11}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{3}{4} > 0$$

La suite (v_n) est donc croissante

4) On cherche en fait :

$$\left|v_n - \frac{8}{3}\right| = 10^{-6} \Leftrightarrow \frac{11}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 10^{-6} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{3}{11} \times 10^{-6}$$

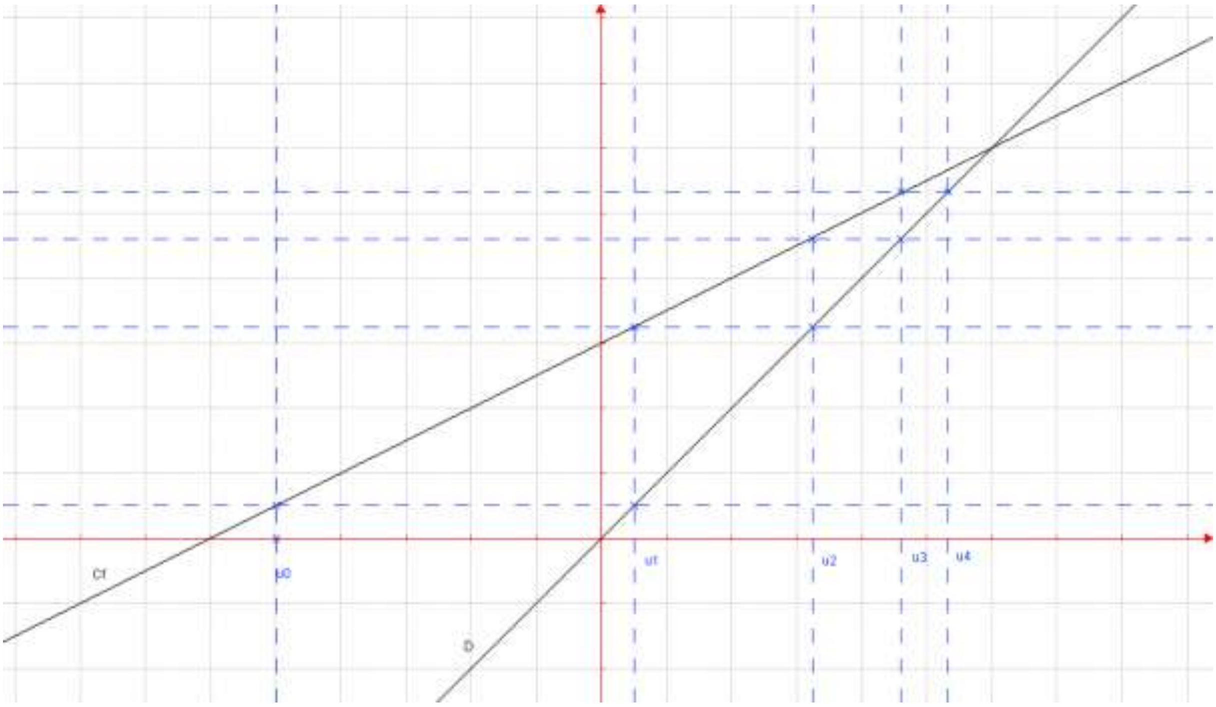
On tâtonne à la calculatrice (en TS , vous allez apprendre à résoudre ce genre d'équation rigoureusement) et on trouve n = 11 .

5) Puisque 0,25 est plus petit que 1 , quand je l'élève à une grand puissance , il devient tout petit donc $\frac{11}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc la suite (v_n) tend vers 8/3 .

Exercice 2

1) On va utiliser la courbe de la fonction f et la droite D d'équation y = x . On place u_0 , puis comme $f(u_0) = u_1$, l'image de -5 par la courbe de f donne u_1 mais il est en ordonnée . On le « rabat » sur l'axe des abscisses en utilisant D .

Corrigé fiche 5 : comportement d'une suite



Il semble que la suite soit croissante et converge vers 6 .

2) On résout :

$$\frac{1}{2}x + 3 = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 3 \Leftrightarrow x = 6$$

Donc a = 6

3) Comme dans l'exercice précédent , calculons quelques termes pour émettre une conjecture :

$$u_0 = -5\,;\ u_1 = \frac{1}{2}\ ;\ u_2 = \frac{13}{4}\ ;\ v_0 = -11\,;\ v_1 = -\frac{11}{2}\ ;\ v_2 = -\frac{11}{4}$$

Il semble que la suite (v_n) soit géométrique de raison ½ ; démontrons le :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 6}{u_n - 6} = \frac{\frac{1}{2}u_n + 3 - 6}{u_n - 6} = \frac{\frac{1}{2}(u_n - 6)}{u_n - 6} = \frac{1}{2}$$

Donc la suite (v_n) est bien géométrique de raison ½

4) On a :

$$v_n = -11\left(\frac{1}{2}\right)^n \ et\ donc\ u_n = -11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$$

$$u_{n+1} - u_n = -11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n = 11\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{11}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$$

La suite est donc croissante .

De plus , ½ < 1, on a $-11\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tend vers 0 et donc la limite de (u_n) est 6 .

Corrigé fiche 5 : comportement d'une suite

Algorithmique

Variables
n : entier
Début
Affecter à n la valeur 0
Tant que $2^n < 500$ faire
    Affecter à n la valeur n + 1
Fin tant que
Afficher n
Fin

On doit trouver : n = 9

Question ouverte

Soit (w_n) la suite telle que chaque terme est égale à l'aire colorée à l'étape n .
On colore à chaque fois la moitié de ce qui reste donc (w_n) est égale à la somme des n termes d'une suite géométrique de premier terme ½ et de raison ½ .

$$w_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 1$$

On ne pourra donc pas trouver une valeur de n pour que l'aire soit égale à 1 puisqu'il faudrait que ce soit l'infini . Par contre , on pourra trouver des valeurs approchées , par exemple , si on veut que l'aire soit égale à 1 à 10^{-9} près ,, on peut tâtonner à la calculatrice pour que $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ soit égal à 10^{-9} : n = 30 .