Corrigé fiche 4 : notion de suites

Applications directes

Exercice 1

$$1)\ u_0 = 3(0) + 8 = 8\ ;\ u_1 = 3(1) + 8 = 11\ ;\ u_2 = 3(2) + 8 = 14$$

$$2)\ u_0 = \frac{0^2+5}{2(0)+3} - 4 = \frac{5-12}{3} = -\frac{7}{3}\ ;\ u_1 = \frac{1^2+5}{2(1)+3} - 4 = -\frac{14}{5}\ ;\ u_2 = \frac{2^2+5}{2(2)+3} - 4 = -\frac{19}{7}$$

$$3)\ u_0 = 5\ ;\ u_1 = 3u_0 + 8 = 3(5) + 8 = 23;\ \ u_2 = 3u_1 + 8 = 77\ ;\ \ u_3 = 3u_2 + 8 = 239$$

$$4)\ u_0 = 4\ ;\ u_1 = \frac{u_0 - 5}{u_0 + 8} = \frac{4-5}{4+8} = -\frac{1}{12}\ ;\ u_2 = \frac{u_1 - 5}{u_1 + 8} = \frac{-\frac{1}{12} - 5}{-\frac{1}{12} + 8} = -\frac{61}{95}\ ;\ u_3 = -\frac{536}{699}$$

Exercice 2

$$1)\ u_n = v_n - \frac{3}{13}\ avec\ v_n = \frac{2}{15}v_{n-1} + \frac{1}{5}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{v_{n+1} - \frac{3}{13}}{v_n - \frac{3}{13}} = \frac{\frac{2}{15}v_n + \frac{1}{5} - \frac{3}{13}}{v_n - \frac{3}{13}} = \frac{\frac{2}{15}v_n - \frac{2}{65}}{v_n - \frac{3}{13}} = \frac{\frac{2}{15}\left(v_n - \frac{15}{65}\right)}{v_n - \frac{3}{13}} = \frac{\frac{2}{15}\left(v_n - \frac{3}{13}\right)}{v_n - \frac{3}{13}} = \frac{2}{15}$$

$$u_0 = 1\ donc\ u_n = 1\left(\frac{2}{15}\right)^n$$

$$2)\ \ u_n = 13v_n - 4\ avec\ v_n = -\frac{3}{10}v_{n-1} + \frac{4}{10}\ et\ v_0 = 1$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{13v_{n+1} - 4}{13v_n - 4} = \frac{13\left(-\frac{3}{10}v_n + \frac{4}{10}\right) - 4}{13v_n - 4} = \frac{\frac{-39}{10}v_n + \frac{12}{10}}{13v_n - 4} = \frac{-\frac{3}{10}(13v_n - 4)}{13v_n - 4} = -\frac{3}{10}$$

$$u_n = 9\left(-\frac{3}{10}\right)^n$$

Exercice 3

1) $u_1 = 4\ et\ u_{n+1} - u_n = 5$ donc la suite est arithmétique de raison 5 : $u_n = 4 + 5(n-1) = 5n - 1$
2) $u_0 = 2\ et\ u_{n+1} - u_n = -9$ donc la suite est arithmétique de raison – 9 : $u_n = 2 - 9n$

Approfondissement

Exercice 1

1) On a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 2} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{u_n - 2 - (u_{n+1} - 2)}{(u_{n+1} - 2)(u_n - 2)} = \frac{u_n - u_{n+1}}{(u_{n+1} - 2)(u_n - 2)} = \frac{u_n - 4 + \frac{4}{u_n}}{\left(4 - \frac{4}{u_n} - 2\right)(u_n - 2)}$$

$$= \frac{{u_n}^2 - 4u_n + 4}{(2u_n - 4)(u_n - 2)} = \frac{(u_n - 2)^2}{2(u_n - 2)^2} = \frac{1}{2}$$

Donc la suite (v_n) est arithmétique de raison ½

2) On a :

$$v_0 = \frac{1}{3-2} = 1\ et\ v_n = 1 + \frac{n}{2}$$

$$v_n = \frac{1}{u_n - 2}\ donc\ v_n(u_n - 2) = 1\ et\ v_n u_n - 2v_n = 1\ donc\ u_n = \frac{1 + 2v_n}{v_n} = \frac{3+n}{1 + \frac{n}{2}} = \frac{6 + 2n}{2 + n}$$

Exercice 2

1) $u_1 = u_0 + 0 + 1 = 0\ ;\ u_2 = u_1 + 1 + 1 = 2\ ;\ u_3 = u_2 + 2 + 1 = 5\ ; u_4 = u_3 + 3 + 1\ = 9\ ;$

$$u_5 = u_4 + 4 + 1 = 14$$

2) Elle n'est pas arithmétique car 5 – 2 = 3 et 2 – 0 = 2 .

Elle n'est pas géométrique car 5/2 = 2,5 et 9/5 =1,8

Corrigé fiche 4 : notion de suites

3) $v_0 = u_1 - u_0 = 1$; $v_1 = u_2 - u_1 = 2$; $v_2 = u_3 - u_2 = 3$; $v_3 = u_4 - u_3 = 4$

$v_{n+1} - v_n = v_n = u_{n+2} - u_{n+1} - u_{n+1} + u_n = u_{n+1} + n + 1 + 1 - 2(u_n + n + 1) + u_n$
$= u_{n+1} - n - u_n = u_n + n + 1 - n - u_n = 1$

Donc la suite (v_n) est arithmétique de raison 1

4) Par la formule on a : $v_n = 1 + n$

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = \frac{v_0 + v_{n-1}}{2} \times n = \frac{1 + 1 + n - 1}{2} \times n = \frac{n(n+1)}{2}$$

5) $v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \cdots + u_n - u_{n-1} = u_n - u_0 = u_n + 1$

$$u_n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} \; donc \; u_n = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

Algorithmique

Exercice 1

Variables
 N , u : nombres réels
Début
 Affecter à n la valeur 1
 Affecter à u la valeur 5
  Pour n allant de 2 à 10
   Affecter à u la valeur 2*u+3
   Afficher u
  Fin pour
Fin

Exercice 2

Variables
 n , S : nombres réels
Début
 Affecter à n la valeur 1
 Affecter à S la valeur 1
  Pour n allant de 2 à 10
   Affecter à S la valeur S + 1/(n^2)
  Fin pour
 Afficher S
Fin

Question ouverte

Soit la suite (u_n) donnant le nombre de bougies chaque année alors : $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 1$ (la première année il y a une bougie et chaque année on ajoute une bougie)

Cette suite est donc arithmétique et donc $u_n = 1 + (n-1) = n$

Soit n l'âge actuel de l'émir .

La somme de toutes les bougies est :

$$\frac{u_1 + u_n}{2} \times n = \frac{n(n+1)}{2}$$

On sait qu'il a actuellement 1999 bougies mais il en manque donc trouvons quelle valeur minimale de n on doit avoir :

$$\frac{n(n+1)}{2} \geq 1999 \Leftrightarrow n^2 + n - 3998 \geq 0 \; ; \; \Delta = 15993 \; ; \; n > 62{,}7$$

On cherche l'âge non fêté donc on cherche u_k tel que

$$\frac{n(n+1)}{2} = 1999 + k \; donc \; k = \frac{n(n+1)}{2} - 1999 \; et \; k \; < \; n \, .$$

$$\frac{n(n+1)}{2} - 1999 < n \Leftrightarrow \frac{n^2 - n - 3998}{2} < 0 \Leftrightarrow n^2 - n - 3998 < 0 \; ;$$

$$\Delta = 15993 \; ; \; n' = -62{,}7 \, , n" = 63{,}7 \; donc \; 0 < n < 63{,}7$$

On a donc 62,7 < n < 63,7 donc n = 63

Et k = 17

L'émir n'a donc pas fêté ses 17 ans