Corrigé fiche 3 : sens de variations d'une fonction

Applications directes

$$1)f'(x)=\frac{3(2-5x)+5(3x-7)}{(2-5x)^2}=\frac{-29}{(2-5x)^2}<0$$

La fonction est donc décroissante

$$2)f'(x)=\frac{2x^2-8-4x^2}{(x^2-4)^2}=\frac{-2x^2-8}{(x^2-4)^2}=-\frac{(2x^2+8)}{(x^2-4)^2}<0;$$

La fonction est donc décroissante

$$3)f'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}>0\ si\ x>0\ et\ f'(x)<0\ si\ x<0;$$

La fonction est donc décroissante si x < 0 et croissante si x > 0

$$4)f'(x)=\frac{(4x-5)(x-3)-2x^2+5x-3}{(x-3)^2}=\frac{2x^2-12x+12}{(x-3)^2}$$

Le dénominateur est positif donc f '(x) est du signe de $2x^2 - 12x + 12 = 2(x^2 - 6x + 6)$

$$\Delta=36-24=12$$

$$x'=\frac{6-2\sqrt{3}}{2}=3-\sqrt{3}\ et\ x''=3+\sqrt{3}$$

x		$3-\sqrt{3}$		$3+\sqrt{3}$	
f '(x)	+	0	-	0	+

La fonction f est donc croissante sur $]-\infty;3-\sqrt{3}[\cup]3+\sqrt{3};+\infty[$ et f décroissante sur $]3-\sqrt{3};3[\cup]3;3+\sqrt{3}[$

$$5)f'(x)=\frac{1+\sqrt{x}-\frac{x}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}=\frac{2+\sqrt{x}}{2(1+\sqrt{x})^2}>0\,;$$

La fonction est donc croissante

$$6)f'(x)=\frac{x+\sqrt{x}-x-\frac{x}{2\sqrt{x}}}{(x+\sqrt{x})^2}=\frac{\sqrt{x}}{2(x+\sqrt{x})^2}>0$$

La fonction est donc croissante

$$7)f'(x)=2\left(\frac{x-3}{x+1}\right)\left(\frac{x+1-x+3}{(x+1)^2}\right)=\frac{8(x-3)}{(x+1)^3}=\frac{8(x-3)}{(x+1)(x+1)^2};$$

$(x + 1)^2$ est positif donc f '(x) est du signe de (x – 3)(x + 1)

x		-1		3	
f '(x)	+	//	-	0	+

La fonction est donc croissante sur $]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[$ et décroissante sur]-1 ;3[

$$8)f'(x)=4\left(\frac{x}{3-x}\right)^3\left(\frac{3-x+x}{(3-x)^2}\right)=\frac{12x^3}{(3-x)^5}$$

Tous les carrés sont positifs , donc f '(x) est du signe de x (3 – x)

Corrigé fiche 3 : sens de variations d'une fonction

x		0		3	
x	-	0	+		+
(3-x)	+		+	0	-
f '(x)	-	0	+	//	-

La fonction est donc croissante sur]0 ;3[et décroissante sur $]-\infty; 0[\cup]3; +\infty[$

$$9) f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+5}} > 0$$

La fonction est donc croissante

$$10) f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{3-x}} < 0$$

La fonction est donc décroissante

$$11) f'(x) = 2(x+3) + \frac{1}{2\sqrt{2+x}}$$

Pour que la racine soit définie , x > - 2 donc x + 3 > 0 et f '(x) > 0
La fonction est donc croissante sur $]-2; +\infty[$

$$12) f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} + \frac{1}{\sqrt{2x-3}} > 0$$

La fonction est donc croissante

Approfondissement

Exercice 1

1) On sait que Volume = x^2y donc $y = 8/x^2$
2) $A(x) = 2x^2 + 4xy = 2x^2 + 32/x$
3) $(x-2)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$

Par identification , on obtient : a = 1 , b – 2a = 0 , c – 2b = 0 et 2c = 8 donc a = 1 , c = 4 et b = 2

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$$

$$\Delta = 4 - 16 = -12 < 0 \; donc \; x^2 + 2x + 4 > 0$$

$x^3 - 8$ est donc du signe de x – 2 donc $x^3 - 8 > 0$ si x > 2 et $x^3 - 8 < 0$ si x < 2

4) Il faut que A(x) soit minimale .

$$A'(x) = 4x - \frac{32}{x^2} = \frac{4(x^3-8)}{x^2}$$

Par la question 3) , on peut dresser le tableau de variation de A(x) car A'(x) est du signe de $x^3 - 8$

x		2	
A'(x)	-	0	+
A(x)	↘		↗

A(x) est donc minimale si x = 2 et si y = 2

Corrigé fiche 3 : sens de variations d'une fonction

Exercice 2

En résumé , un carré de 12 sur 10 dans lequel on coupe les coins carrés de côtés x pour faire une boite .

Le volume est donc : V(x) = (12 – 2x)(10 – 2x) x = $4x^3 - 44x^2 + 120x$

$$V'(x) = 12x^2 - 88x + 120 = 4(3x^2 - 22x + 30)$$

$$\Delta = 484 - 360 = 124$$

$$x' = \frac{22 - \sqrt{124}}{6} = \frac{11 - \sqrt{31}}{3} \cong 1{,}8 \; et \; x'' = \frac{11 + \sqrt{31}}{3}$$

Puisque x est une longueur , x > 0 ; de plus , pour pouvoir ôter x à chaque coin dans 10 cm , il faut que x < 5 .

x	0		$\frac{11-\sqrt{31}}{3}$		$\frac{11+\sqrt{31}}{3}$		5
V'(x)		+	0	-	0	+	
V(x)		↗	97	↘		↗	0

Le volume est donc maximum pour x = $\frac{11-\sqrt{31}}{3}$ soit environ 1,8 .

Algorithmique

a) Les images doivent être de signes différents c'est-à-dire que leur produit est négatif .

b) Algorithme : h est le pas donc avec trois décimales , h = 0, 001

Variables

a , h : nombres

Début

Saisir a

Saisir h

Tant que f(a) f(a+h) > 0 faire

Affecter à a la valeur a+h

Si f(a) f(b) > 0

Fin tant que

Afficher a

Afficher a + h

Fin

Question ouverte

On pose x le côté du carré . Soit y le côté de l'hexagone régulier alors : 4x + 6 y = 100 donc

$$y = \frac{100 - 4x}{6} = \frac{50 - 2x}{3}$$

Soit A(x) la somme des aires en fonction de x .

Un hexagone régulier est composé de 6 triangles équilatéraux de côté y de hauteur h

Avec Pythagore :

$$h = \frac{y\sqrt{3}}{2}$$

Donc l'aire de cet hexagone est égale à :

$$6 \times \frac{y \times \frac{y\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3y^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{50 - 2x}{3}\right)^2$$

Corrigé fiche 3 : sens de variations d'une fonction

$$A(x) = x^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{50 - 2x}{3}\right)^2 = x^2 + \frac{\sqrt{3}(1250 - 50x + 2x^2)}{3}$$
$$= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right)x^2 - \frac{50\sqrt{3}}{3}x + \frac{1250\sqrt{3}}{3}$$
$$A'(x) = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} + 2\right)x - \frac{50\sqrt{3}}{3}$$

A'(x) est donc négative si x < a et positive si x > a avec

$$a = \frac{50\sqrt{3}}{3} \times \frac{3}{4\sqrt{3} + 6} = \frac{25\sqrt{3}(3 - 2\sqrt{3})}{(3 + 2\sqrt{3})(3 - 2\sqrt{3})} = -\frac{25\sqrt{3}(3 - 2\sqrt{3})}{3} = 50 - 25\sqrt{3} \cong 6{,}7$$

Donc A est minimale si $x = 50 - 25\sqrt{3}$