Corrigé fiche 2 : Dérivées

Applications directes

Exercice 1

$$1)\ f'(x) = 10x\ ;\ 2)\ f'(x) = \frac{2}{x^2}\ ;\ 3)\ f'(x) = \frac{7}{2\sqrt{x}}$$

$$4) f'(x) = 8x - 3\ ;\ 5) f'(x) = 5 - \frac{2}{x^2}\ ;\ 6)\ f'(x) = 1 - 6x\ ;\ 7) f'(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$8) f'(x) = 12x - 5\ ;\ 9)\ f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x+1}{2\sqrt{x}}\ ;$$

$$10) f'(x) = (2x-1)(x+2) + x^2 - x = 3x^2 + 2x - 2\ ;$$

$$11) f'(x) = 5\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}(5x - 4) = -5x + 7$$

$$12) f'(x) = 2x\left(1 + \sqrt{x}\right) + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} = 2x + 2x\sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{2} = 2x + \frac{5\sqrt{x}}{2}\ ;$$

Exercice 2

$$1) f'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(\sqrt{x} + 1\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{x} + 2\right) = -\frac{\sqrt{x}}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{2x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{x^2} - \frac{\sqrt{x}}{2x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$2) f'(x) = 6(3x+5)\ ;\ 3) f'(x) = 2\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(x + \sqrt{x}\right) = 2\left(x + \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2x + 3\sqrt{x} + 1$$

$$4) f'(x) = 15(5x+3)^2\ ;\ 5) f'(x) = -\frac{3}{x^2}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2\ ;\ 6) f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}\left(2 + \sqrt{x}\right)^3\ ;$$

$$7) f'(x) = 2(-3 + x^5)(-3x + x^6)$$

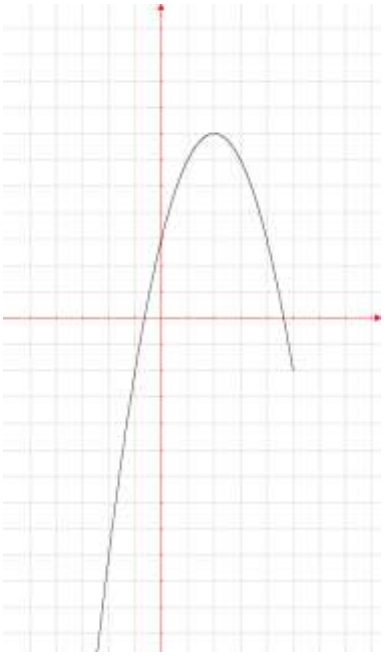
$$8) f'(x) = -\frac{1}{5}\left(0{,}5 - \frac{x}{10}\right)\ ;\ 9) f'(x) = 4(2x-3)(x^2 - 3x + 1)^3\ ;\ 10) f'(x) = 6(x+1)^5\ ;$$

$$11) f'(x) = -\frac{6}{x^2}\left(\frac{1}{x}\right)^5 = -\frac{6}{x^7}$$

$$12) f'(x) = 21x^6 + 24x^3 - 10x + 1$$

Approfondissement

1) Courbe



2) $f'(x) = -2x + 4$
3) a) f ’(0) = 4 et f ’(3) = -2

b) Ce sont les coefficients directeurs des tangentes à C en A et B

c) Tangente en A : $y = 4x + 3$; tangente en B : $y = -2(x-3) + 6 \; donc \; y = -2x + 12$

d) On résout :

$$\begin{cases} y = 4x + 3 \\ y = -2x + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x + 3 \\ 6x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow D\left(\frac{3}{2}; 9\right)$$

e) Le milieu de [AB] a pour abscisse : (0 + 3)/2 = 3/2 : c'est bien la même abscisse que D

4) a)Tangente en A :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \Leftrightarrow y = (-2a+4)(x-a) + (-a^2 + 4a + 3)$$

$$\Leftrightarrow y = (-2a+4)x + a^2 + 3$$

b) De la même façon , on écrit la tangente en B : $y = (-2b+4)x + b^2 + 3$

$$\begin{cases} y = (-2a+4)x + a^2 + 3 \\ y = (-2b+4)x + b^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (-2a+4)x + a^2 + 3 \\ (2b - 2a)x = -a^2 + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (-2a+4)x + a^2 + 3 \\ x = \dfrac{a+b}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a+b}{2} \\ y = (-a+2)(a+b) + a^2 + 3 = -ab + 2a + 2b + 3 \end{cases}$$

L'abscisse de l'intersection des deux tangentes est toujours celle du milieu de [AB]

Algorithmique

Variables

    f , g fonctions
    a , b réels

Début

    Saisir f
    Affecter à g la valeur fonction dérivée de f
    Affecter à a la valeur g(1)
    Affecter à b la valeur f(1)
    Afficher « l'équation de la tangente est y = a(x-1) + b avec »
    Afficher « a = »
    Afficher a
    Afficher « b = »
    Afficher b

Fin

Question ouverte

Pistes

Commencer par calculer la dérivée et écrire les tangentes

Corrigé

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1} \; ; \; f'(x) = a - \frac{c}{(x-1)^2}$$

La courbe passe par A si : 3a + b + c/2 = 2 donc 6a + 2b + c = 4

Une tangente horizontale en A signifie que f '(3) = 0 donc a – c/4 = 0 donc c = 4a

La dernière condition se traduit par f '(2) = 3 (car des droites parallèles ont le même coefficient directeur) donc : a – c = 3

$$\begin{cases} c = 4a \\ a - c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a = 3 \\ c = 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = -4 \end{cases}$$

$$-6 + 2b - 4 = 4 \Leftrightarrow b = 7$$

$$f(x) = -x + 7 - \frac{4}{x-1}$$