Corrigé Fiche 1 second degré

Application directe

1) $x^2+3x-40$: $\Delta = 9 + 160 = 169 = 13^2$, x' = 5 et x'' = - 8 d'où la factorisation (x – 5) (x + 8) ; $x^2+3x-40 < 0$ sur]- 8 ; 5 [
2) $-x^2+2x+48$: $\Delta = 4 + 192 = 196 = 14^2$, x' = 8 et x'' = - 6 d'où la factorisation - (x – 8) (x + 6) et $-x^2+2x+48 > 0$ sur] -6 ; 8[
3) $2x^2-4x-100 = 2(x^2 - 2x - 50)$: $\Delta = 4 + 200 = 204$ d'où :
   x' = $\dfrac{2+2\sqrt{51}}{2} = 1+\sqrt{51}$ et x'' = $1-\sqrt{51}$.
   On obtient la factorisation $2(x-1-\sqrt{51})(x-1+\sqrt{51})$ et
   $2x^2-4x-100 < 0$ sur $]1-\sqrt{51};1+\sqrt{51}[$
4) $-x^2+4x-4 = -(x^2-4x+4) = -(x-2)^2 \leq 0$
5) $3x^2-5x+25$: $\Delta = 25 - 300 = -275 < 0$ donc pas de racines ni de factorisation ; le polynôme est du signe de 3 donc est positif pour tout x
6) $2x^2+3x+5$: $\Delta = 9 - 40 = -31 < 0$ donc pas de racines ni de factorisation et le polynôme est toujours positif
7) x^4+2x^2-3 : on pose X = x^2 et on doit étudier : $X^2 + 2X - 3$; $\Delta = 4 + 12 = 16$ donc X' = - 3 et X'' = 1 d'où la factorisation : (X – 1) (X + 3) soit (x^2 - 1) (x^2 + 3) ou encore (x – 1) (x + 1) (x^2 + 3) . Et ce polynôme est négatif sur]-1 ; 1[car $x^2 + 3 > 0$ et donc x^4+2x^2-3 est du signe de (x – 1) (x + 1)
8) $2x^4-3x^2+7$: on pose X = x^2 et on étudie : $2X^2 - 3X + 7$; $\Delta = 9 - 56 = -47 < 0$ donc pas de factorisation et le polynôme est du signe de 2 donc positif

Approfondissement

Exercice 1

1) On a : g(1) = 1 + 5 – 12 + 6 = 0 donc 1 est solution de g(1) = 0
2) $(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c$
   $$= ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$$

Par identification avec g(x) :
a = 1 , b – a = 5 ; c – b = - 12 et – c = 6 donc a = 1 , c = - 6 , b = 6

$$g(x) = (x-1)(x^2+6x-6)$$

3) Commençons par étudier le signe de $x^2 + 6x - 6$: $\Delta = 36 + 24 = 60$ donc les racines sont :$\frac{-6-2\sqrt{15}}{2} = -3-\sqrt{15}$ et $-3+\sqrt{15}$

x	$-\infty$		$-3-\sqrt{15}$		1		$-3+\sqrt{15}$		$+\infty$
x – 1		-		-	0	+		+	
x^2+6x-6		+	0	-		-	0	+	
g(x)		-	0	+	0	-	0	+	

Exercice 2

1) On doit résoudre f(x) – 8 ≥ 0

$$x+\frac{16}{x}-8 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-8x+16}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)^2}{x} \geq 0$$

Or x > 0 et un carré est toujours positif ou nul donc l'inégalité est toujours vraie

2) Puisque $f(x) \geq 8$ pour tout $x > 0$ et que $f(4) = 8$, alors pour tout $x > 0$, $f(x) \geq f(4)$ et par définition du minimum , cela signifie que f admet un minimum pour x = 4 qui vaut 8

Exercice 3

R(x) = 25 x est la recette totale

Le bénéfice est alors : $R(x) – C(x) = -0{,}04\,x^2 +65\,x – 8000$.

L'entreprise est bénéficiaire si $B(x) > 0$ donc on doit résoudre : $-0{,}04\,x^2 + 65\,x – 8000 > 0$

$$\Delta = 4225 - 1280 = 2945$$

$$x' = \frac{-65-\sqrt{2945}}{-0{,}08} \cong 1490 \; et \; x'' = \frac{-65+\sqrt{2945}}{-0{,}08} \cong 134$$

L'entreprise est donc bénéficiaire si elle vend entre 134 et 1490 pantalons .

Algorithmique

Variables :

    a , b , c , D , x ,y nombres réels

Début

    Saisir a
    Saisir b
    Saisir c
    Affecter à D la valeur b^2-4*a*c
    Afficher « la discriminant de la fonction est »
    Afficher D
    Si D > 0
        Affecter à x la valeur (-b-racine(D))/(2a)
        Affecter à y la valeur (-b+racine(D))/(2a)
        Afficher « les solutions sont »
        Afficher x
        Afficher y
    Fin si
    Si D < 0
        Afficher « pas de solutions »
    Fin si
    Si D = 0
        Affecter à x la valeur –b/(2a)
        Afficher « la solution est »
        Afficher x
    Finsi

Fin

Question ouverte

Des pistes

Un polynôme de second degré s'écrit $ax^2 + bx + c$

Dans la question 2 , tous les nombres peuvent s'écrire 2x avec x qui varie de …. à …

Dans la question 3 , comment passe t'on d'un nombre pair à un nombre impair ? Penser à décomposer la somme en deux sommes , les pairs + les impairs .

Corrigé

Corrigé Fiche 1 second degré

1) Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ alors :

$$P(x+1) - P(x) = 2x \Leftrightarrow a(x+1)^2 + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c = 2x$$
$$\Leftrightarrow 2ax + a + b = 2x \Leftrightarrow a = 1 \; et \; a + b = 0 \; donc \; a = 1\,, b = -1$$
$$P(x) = x^2 - x + c \; et \; P(0) = 0 \; donne \; c = 0 \; donc \; P(x) = x^2 - x$$

2) En utilisant le polynôme de la question 1 , on peut écrire :

$$P(2) - P(1) = 2(1)\,;\; P(3) - P(2) = 2(2);\; P(4) - P(3) = 2(3) \ldots$$
$$S = P(2) - P(1) + P(3) - P(2) + P(4) - P(3) + \cdots + P(n+1) - P(n)$$
$$= P(n+1) - P(1) = (n+1)^2 - (n+1) - 0 = n^2 + n$$

3) La somme de tous les entiers non nuls peut s'écrire :

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = 2 + 4 + \cdots + 2p + 1 + 3 + 5 + \cdots + 2p + 1$$

Il reste donc à savoir si n est pair ou impair .

Premier cas : n pair alors n = 2p et donc

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = 2 + 4 + \cdots + 2p + 1 + 3 + 5 + \cdots + 2p - 1$$

Notons $S' = 2 + 4 + \cdots + 2p\,;\; alors\; 1 = 2 - 1; 3 = 4 - 1 \ldots\; donc\; S = S' + S' - p$

Et par la question 2 : S = $2(p^2 + p) - p = 2p^2 + p$

Deuxième cas : si n est impair , alors n = 2p + 1 et avec le même raisonnement :

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = 2 + 4 + \cdots + 2p + 1 + 3 + 5 + \cdots + (2p + 1)$$
$$= S' + S' + p + 1 \;=\; 2(p^2 + p) + p + 1 = 2p^2 + 3p + 1$$