1 Notion de suites

1.1 Suite définie à l'aide d'une fonction

Définition.

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général , noté u_n , tel que $u_n = f(n)$

Exemple.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 3n - 8$. Alors $u_0 = -8$, $u_{10} = 22$

Remarque.

On peut calculer n'importe quel terme de la suite par un calcul direct .

1.2 Suite définie par une relation de récurrence

Définition.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On peut caractériser une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée du premier terme u_0 et la donnée d'un terme en fonction du précédent , c'est à dire $u_{n+1} = f(u_n)$

Exemple.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 5u_n + 2$. Calculer u_2

Remarque.

Quand une suite est définie par une relation de récurrence , on a besoin de calculer tous les termes précédant celui qu'on cherche .

1.3 Limite de suite

Définition.

Lorsque n tend vers $+\infty$, on regarde le comportement des termes de la suite . Si ceux ci se stabilisent vers un même nombre , fini ou non , on dit que la suite admet une limite .

Exemple.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 3n - 5$. Si n devient très grand , alors u_n également . On peut donc dire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Propriété.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de limites respectives a et b . Alors :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = a + b$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = ab$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$

Exemple.

Déterminer la limite de $u_n = n^2 + 3n$

A retenir

Il y a quatre formes indéterminées , c'est à dire pour lesquelles on ne peut pas calculer directement la limite : $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty \times 0$ et $-\infty + \infty$

Exemple.

Déterminer la limite de $u_n = n^2 - 5n$

Exemple.

Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{3n-8}{2n+4}$

2 Suite arithmétique

2.1 Terme général

Définition.

Une suite est arithmétique lorsqu'on passe d'un terme au suivant en ajoutant la même constante , appelée raison . C'est à dire : $u_{n+1} = u_n + r$ avec $r \in \mathbb{R}$

Exemple.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n + 7$. C'est une suite arithmétique de raison 7

Propriété.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 . Alors , son terme général est donné par : $u_n = u_0 + nr$

Exemple.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n + 7$ .Donner l'expression de son terme général en fonction de n

2.2 Somme

Propriété.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 . Alors on a : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$

Exemple.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n + 7$. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{5} u_k$

3 Suite géométrique

3.1 Terme général

Définition.

Une suite est géométrique lorsqu'on passe d'un terme au suivant en multipliant par la même constante , appelée raison . C'est à dire : $u_{n+1} = u_n \times q$ avec $q \in \mathbb{R}$

Exemple.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 7u_n$. C'est une suite géométrique de raison 7

Propriété.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 . Alors , son terme général est donné par : $u_n = u_0 \times q^n$

Exemple.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 7u_n$ .Donner l'expression de son terme général en fonction de n

3.2 Somme

Propriété.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 . Alors on a : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \times u_0$

Exemple.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 7u_n$. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{5} u_k$

4 Variations d'une suite

Définition.

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si , $u_{n+1} > u_n$ pour tout n .

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si , $u_{n+1} < u_n$ pour tout n .

Remarque.

En pratique , on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Exemple.

Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n - 5$