A retenir

Soit l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec a réel non nul .

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution
- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Le principe

On met le polynôme sous forme canonique
On factorise
Puis on utilise la propriété de l'équation produit

La démonstration

Mise sous forme canonique : a non nul donc ,

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

On note : $\Delta = b^2 - 4ac$

On a donc : $ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$

Regardons si on peut factoriser :

- Si $\Delta = 0$, on a :

  $ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\right)$ et donc $ax^2+bx+c = 0 \iff a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0 \iff$
  $x+\dfrac{b}{2a} = 0$ car $a \neq 0$ et donc $x = -\dfrac{b}{2a}$

- Si $\Delta < 0$, on a :

  $ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$ avec $-\Delta > 0$

  Et donc $a^2+bx+c > 0$ et l'équation $a^2+bx+c = 0$ n'a pas de solution

- Si $\Delta > 0$, on a :

  $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right) = a\left(x+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) =$
  $a\left(x+\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

  Et donc :

  $ax^2+bx+c=0 \iff a\left(x+\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0 \iff x+\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}=0$
  ou $x+\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}=0 \iff x=-\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-b-\Delta}{2a}$ ou $x=-\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$