★★ *Fonctions trigonométriques* ★★

1 Le cercle trigonométrique

1.1 Le radian

Définition.

Soit $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé .

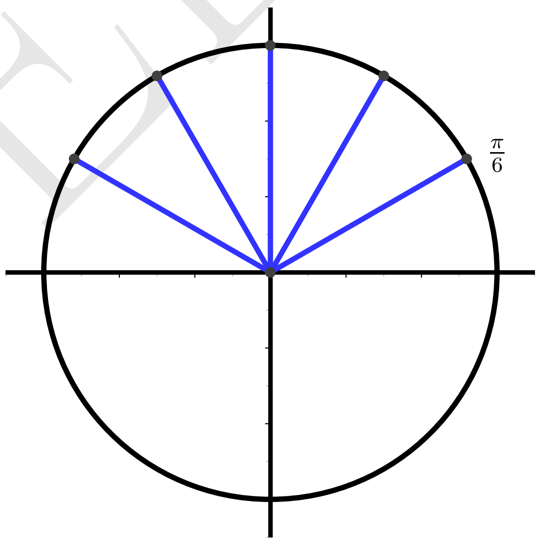
On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1 , orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre

Propriété.

- A tout nombre réel x correspond un point M du cercle trigonométrique qu'on détermine par enroulement de la droite des réels autour du cercle .
- Soit a un nombre réel associé à un point M du cercle trigonométrique . Alors tout réel de la forme $a + 2k\pi$, avec k entier , est associé au même point M .

Exemple.

On veut placer $\frac{\pi}{6}$. On sait que le demi périmètre du cercle trigonométrique est égal à π . On découpe donc le demi cercle supérieur en 6 secteurs .



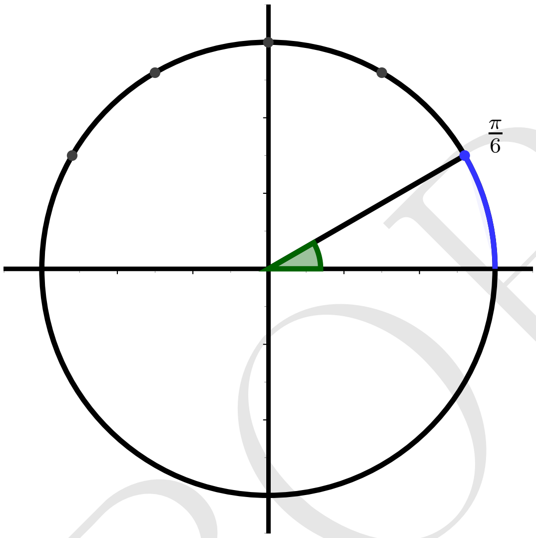
$\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$ donc $\frac{13\pi}{6}$ est placé sur le même point du cercle .

Définition.

La mesure en radian d'un angle est la longueur de l'arc du cercle trigonométrique intercepté par cet angle

Exemple.

L'angle au centre exprimé en radian correspond donc à la longueur de l'arc



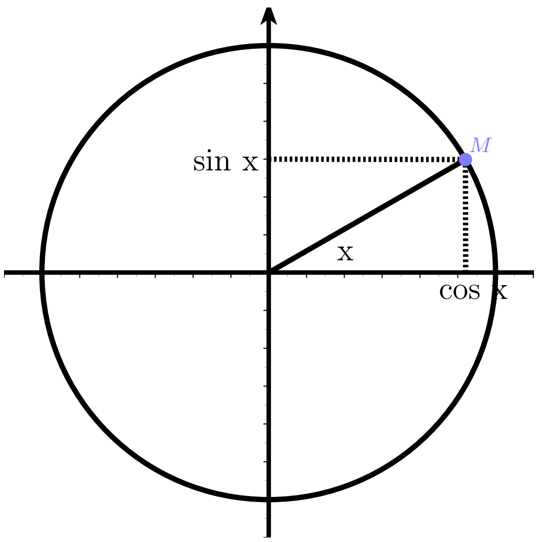
A retenir

$180\ ^\circ = \pi$ rad

1.2 Cosinus et sinus

Définition.

Soit un réel x d'image M sur le cercle trigonométrique . Le cosinus de x correspond à l'abscisse de M et le sinus de x correspond à l'ordonnée de M . On les note respectivement cos x et sin x .



Propriété.

Soit x un réel quelconque

- $-1 \leq cosx \leq 1$ et $-1 \leq sinx \leq 1$
- $cos^2x + sin^2x = 1$
- $cos(x + 2k\pi) = cosx$ et $sin(x + 2k\pi) = sinx$ pour tout k entier

A retenir

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0

1.3 Angles associés

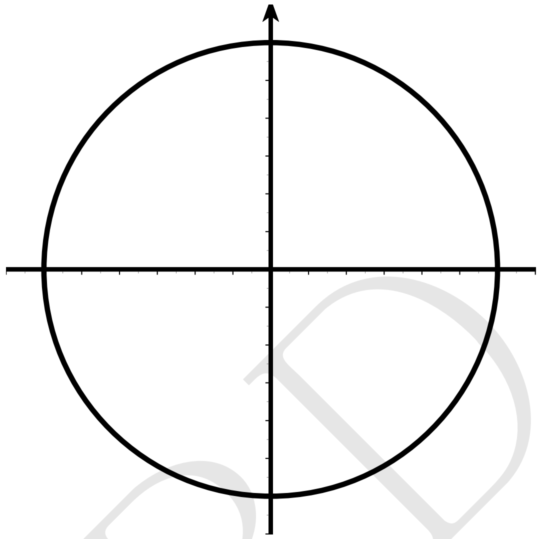
Grâce à différentes symétries , on peut déterminer d'autres valeurs de cosinus et de sinus

.

- $cos(-x) = cosx$
- $sin(-x) = -sinx$
- $cos(x + \pi) = -cosx$
- $sin(x + \pi) = -sinx$
- $cos(\pi - x) = -cosx$
- $sin(\pi - x) = sinx$
- $cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -sinx$
- $cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sinx$
- $sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = cosx$
- $sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cosx$

Exemple.

Déterminer $cos(\frac{2\pi}{3})$



1.4 Formules d'additions et de duplications

A retenir

- $cos(a+b) = cosacosb - sinasinb$
- $cos(a-b) = cosacosb + sinasinb$
- $sin(a+b) = sinacosb + cosasinb$
- $sin(a-b) = sinacosb - cosasinb$
- $cos(2a) = 2cos^2a - 1$
- $cos(2a) = 1 - 2sin^2a$
- $cos(2a) = cos^2a - sin^2a$
- $sin(2a) = 2sinacosa$

Exemple.

Déterminer $cos(\frac{2\pi}{3})$

2 Fonctions cosinus et sinus

2.1 Propriétés

Définition.

On appelle fonction cosinus (resp. sinus) la fonction qui à tout réel x associe cos x (resp. sin x)

Propriété.

- Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π car $cos(x + 2k\pi) = cosx$ et $sin(x + 2k\pi) = sinx$
- La fonction cosinus est paire car $cos(-x) = cosx$
- La fonction sinus est impaire car $sin(-x) = -sinx$

2.2 Courbes