A retenir

La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a admet pour équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Le principe

On sait qu'une équation de droite est de la forme $y = mx + p$ avec m coefficient directeur
On utilise la définition qui nous donne le coefficient directeur f'(a)
On calcule p en utilisant le point A(a ;f(a)) qui appartient à la courbe de f .

La démonstration

Une équation de la tangente est de la forme $y = mx + p$ avec m coefficient directeur
On sait que le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est f'(a)
On a donc : $y = f'(a)x + p$
Soit A le point de la courbe d'abscisse a , alors A(a ;f(a)) , calculons p .
$f(a) = f'(a)a + p \iff p = f(a) - f'(a)a$
On a donc :
$y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a \iff y = f'(a)(x - a) + f(a)$

A retenir

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$

Le principe

On calcule $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

La démonstration

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2ah + h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h + 2a = 2a$
La fonction f est donc dérivable pour tout a réel et $f'(a) = 2a$

A retenir

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Le principe

On calcule $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

La démonstration

Soit a un réel non nul .

$$\lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{-h}{a(a+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}$$

La fonction f est donc dérivable pour tout a réel non nul et $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$

A retenir

Soient deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I .
Alors $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

Le principe

On calcule $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h}$

La démonstration

Soit a un réel de I

La fonction u est dérivable en a donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$

La fonction v est dérivable en a donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(u(a+h) - u(a))(v(a+h)) + u(a)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} =$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{(u(a+h) - u(a))(v(a+h)) + (u(a)(v(a+h) - v(a))}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(u(a+h) - u(a))v(a+h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{u(a)(v(a+h) - v(a))}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(u(a+h) - u(a))}{h} \lim_{h \to 0} v(a+h) + u(a) \lim_{h \to 0} \frac{(v(a+h) - v(a))}{h}$$
$$= u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$$